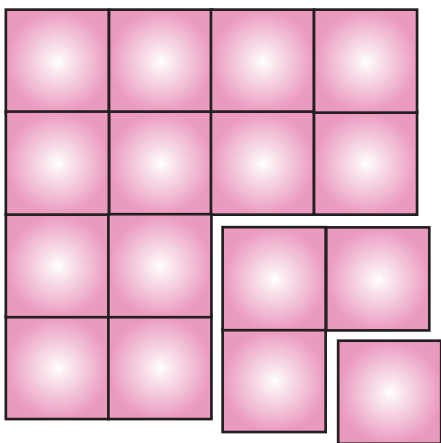
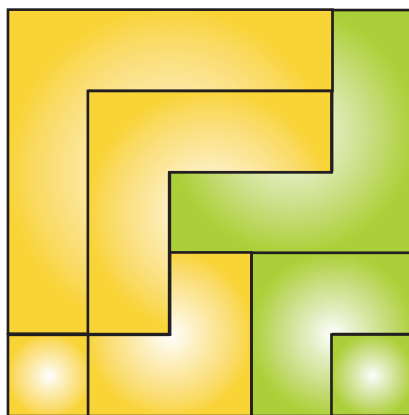


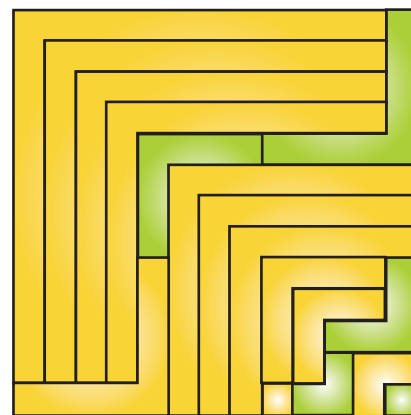
L-DÉCOMPOSITION



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



$$5^2 + 12^2 = 13^2$$



4. L-décompositions et triplets pythagoriciens. Tout nombre carré se décompose comme somme de nombres impairs successifs, car $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, ce dont on se persuade par un dessin. Ce découpage est la L-décomposition du carré de côté n . La question posée

par Joe Fields est : étant donné un triplet pythagoricien (x, y, z) , peut-on toujours réassembler les pièces de la L-décomposition du carré de côté x et du carré de côté y pour obtenir le carré de côté z ? La réponse définitive à cette question n'est pas connue aujourd'hui.

Ce découpage utilise la «technique de l'escalier», dont l'origine est assez ancienne : Girolamo Cardano (Cardan) avait proposé cette méthode en 1557 pour passer par un découpage en deux pièces d'un rectangle de côtés $2a$ et $3b$ à un rectangle de côtés $3a$ et $2b$, ou d'un rectangle de côtés $3a$ et $4b$ à un rectangle de côtés $4a$ et $3b$ (voir la figure 2). Elle aurait été connue de Léonard de Vinci.

Le grand expert en découpages géométriques Harry Lindgren (1912-1992) affirma, en 1964, qu'il n'existait de découpage en quatre pièces que pour les triplets donnés par la formule de Pythagore (laquelle, rappelons-le, ne donne pas tous les triplets pythagoriciens, contrairement à ce que son nom pourrait laisser croire!). Greg Frederickson, le spécialiste mon-

dial actuel des découpages géométriques a découvert que l'affirmation de Lindgren est fautive : il a en effet proposé un découpage général pour la classe de Platon qui utilise à nouveau la technique de l'escalier mais d'une manière assez subtile (voir la figure 3).

La question posée aujourd'hui est donc : existe-t-il d'autres triplets pythagoriciens qui ne seraient donnés ni par la formule de Pythagore ni par la formule de Platon (comme le triplet (20, 21, 29)) et pour lesquels on pourrait trouver un découpage en quatre morceaux pour passer du carré de côté z aux carrés de côté x et de côté y ? Un lecteur proposera-t-il une solution?

D'autres découpages souvent très astucieux et s'appliquant parfois à des

classes infinies d'identités, comme précédemment, ont été découverts par Greg Frederickson. Vous les trouverez décrites dans son merveilleux livre *Dissection Plane and Fancy* (Cambridge University Press, 1997). Avant de le consulter, essayez pour le plaisir de trouver les découpages en cinq pièces associées aux identités :

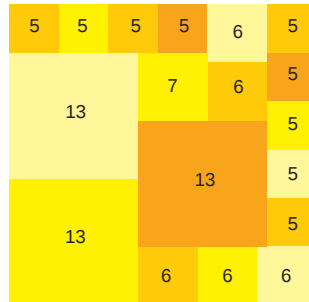
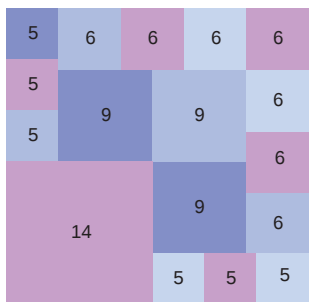
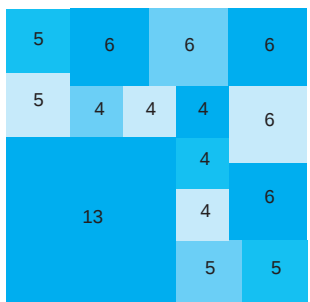
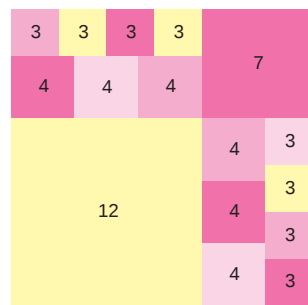
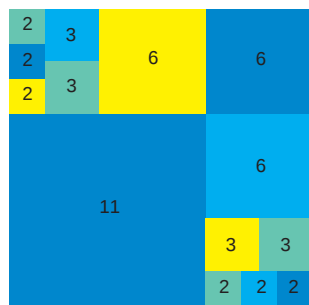
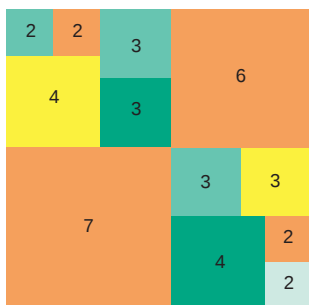
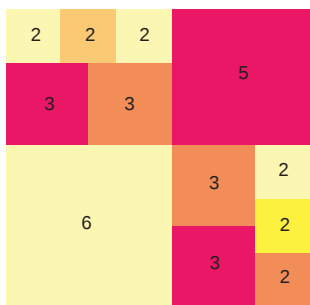
(a) $10^2 + 23^2 = 25^2 + 2^2$

(b) $10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2$

(c) $12^2 + 34^2 = 36^2 + 2^2$

DÉCOUPAGES EN PILES DE L

Récemment un étrange problème lié aux triplets pythagoriciens a été posé par Joe Fields ; ce problème occupera peut-être



$f(n)$ pour n de 2 à 99										
UNITÉS DE n										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
DIZAINES DE n	0	1	1	2	1	3	1	4	3	3
1	5	2	6	2	7	5	8	2	9	3
2	10	7	11	4	12	5	13	9	14	5
3	15	5	16	11	17	7	18	7	19	13
4	20	6	21	7	22	15	23	7	24	9
5	25	17	26	8	27	11	28	19	29	9
6	30	10	31	21	32	13	33	10	34	23
7	35	11	36	11	37	25	38	14	39	13
8	40	27	41	12	42	17	43	29	44	14
9	45	14	46	31	47	19	48	14	49	33

5. La suite d'Erich Friedman : $f(n)$ est le plus grand entier tel qu'il existe un découpage du carré de côté n en carrés plus petits ayant chacun un côté d'au moins $f(n)$ unités ; $f(19) = 3$ signifie que le carré de côté

19 peut être «au mieux» découpé en carrés de côté 3 unités ou plus (pas de carrés plus petits). Les dessins suivants justifient les valeurs de $f(11)$, $f(13)$, $f(17)$, $f(19)$, $f(23)$, $f(29)$ et $f(31)$.

une partie des jours pluvieux de cet été et vous en consolera.

Tout nombre carré se décompose comme somme de nombres impairs successifs, car $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, ce qu'on voit géométriquement tout de suite quand on découpe un carré en L emboîtés (voir la figure 4). Ce découpage est dénommé la «L-décomposition» du carré de côté n .

La question posée par Joe Fields est : étant donné un triplet pythagoricien (x, y, z) , peut-on toujours rassembler les pièces des L-décompositions du carré de côté x et du carré de côté y pour obtenir un assemblage du carré dont le côté est z ?

Tous les essais faits semblent montrer que oui. Quelqu'un saura-t-il le démontrer ou trouver un contre-exemple?

Erich Friedman conjecture un résultat encore plus fort : toute somme de carrés donnant un carré (ainsi, par exemple, $7^2 + 7^2 + 1^2 + 1^2 = 10^2$) conduit de la même façon à des L-décompositions des petits carrés permettant de reconstruire le grand.

PARTITIONS DE CARRÉS ET DE CUBES

Résoudre le problème suivant de découpage de carrés constitue un agréable passe-temps qui pourrait vous occuper une partie d'après-midi pluvieuse cet été en vacances. Il n'est pas très difficile et peut intéresser même les enfants.

Un carré ne peut pas être divisé en deux carrés, ni en trois. En revanche, un carré peut être divisé en quatre carrés, et c'est évident en le découpant par le milieu verticalement et horizontalement.

De même, il est évident qu'un carré peut être divisé en 9 carrés, en 16 carrés en 25 carrés, etc. Ce qui est moins évident, c'est qu'on peut diviser aussi un carré en six carrés plus petits : on trace des traits comme pour le découpage en 9, mais on laisse groupés quatre carrés, ce qui fournit donc un découpage du carré initial en six carrés (un moyen et cinq petits).

La question posée est : pour quelles valeurs de n peut-on ainsi découper un carré en n carrés plus petits (pas nécessairement de tailles différentes)? La réponse, dont je vous laisse trouver la démonstration, est : pour tout nombre n supérieur ou égal à 6.

La même question est posée pour les cubes et, si la pluie n'a pas cessé, il devrait vous occuper au moins jusqu'au dîner : pour quelles valeurs de n peut-on ainsi découper un cube en n cubes plus petits (lesquels ne sont pas nécessairement de tailles différentes)? La réponse est cette fois un peu plus compliquée : 1, 8, 15, 20, 22, 27, 29, 34, 36, 38, 39, 41, 43, 45, 46

et tout n supérieur à 48. La figure 5 donne la solution pour n égal à 54 : elle a été publiée en 1977 par Richard Guy.

UN VÉRITABLE DOMAINE DE RECHERCHE

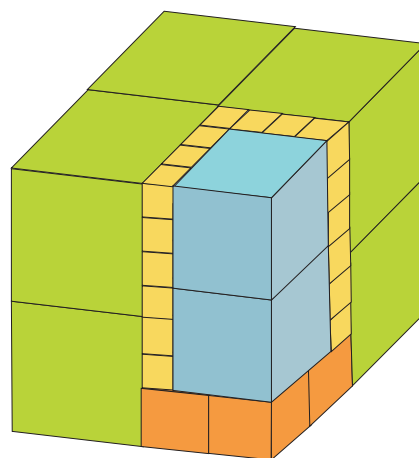
Le problème général du découpage d'un carré en carrés plus petits soulève un grand nombre de problèmes qui sont encore incomplètement résolus et que les amateurs de jeux géométriques, éventuellement aidés de leur ordinateur, devraient pouvoir faire avancer.

Si n est un entier donné, Erich Friedman propose de considérer tous les découpages d'un carré de côté n en plusieurs carrés plus petits, chacun de côté entier. Il y a bien sûr le découpage trivial en n^2 petits carrés de côté 1, mais il en existe de plus économiques, et peut-être certains utilisent-ils des carrés de côté plus grand que 2 ou 3 plus grand encore.

Nous appellerons taille du carré minimum et noterons $f(n)$ le plus grand entier tel que le carré de côté n puisse être découpé en carrés de côté supérieur ou égal à $f(n)$. La valeur $f(11)$ égale à 2, par exemple, signifie que le carré de côté 11 peut être découpé en carrés de côté au moins 2 et que l'on ne connaît pas de découpage n'utilisant que des carrés de côté tous plus grand que 2.

La suite des valeurs de $f(n)$ est répertoriée sous le numéro A036445 dans la célèbre *Encyclopedia of Integer Sequences* de N. Sloane que vous trouverez à : www.research.att.com/~njas/sequences/index.html

La figure 6 présente quelques dessins qui justifient les valeurs de $f(11)$, $f(13)$, $f(17)$, $f(19)$, $f(23)$, $f(29)$ et $f(31)$. On a un

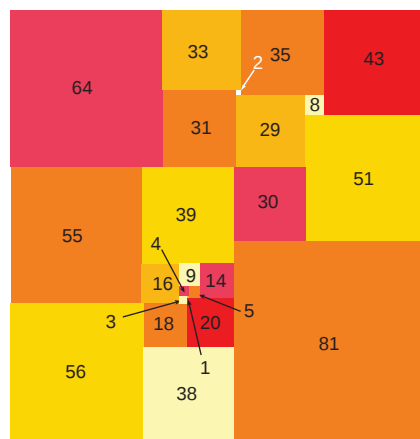
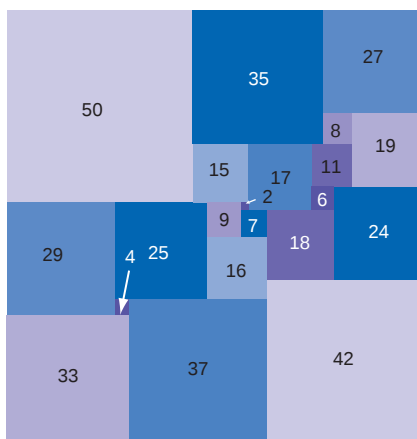


6. Pour quelles valeurs de n peut-on découper un cube en n cubes plus petits? La réponse est : 1, 8, 15, 20, 22, 27, 29, 34, 36, 38, 39, 41, 43, 45, 46 et tout n supérieur à 48. En 1977, tous les cas avaient été traités (par un découpage ou par un raisonnement montrant l'impossibilité), sauf le cas de n égal à 54 qui a été résolu par le découpage suivant.

peu étudié la suite $f(n)$. On voit facilement que, lorsque n est composé, $f(n)$ est plus grand que q , le plus grand facteur propre de n , car on peut bien sûr placer un nombre entier de carrés de côté q dans le carré de côté n .

Joseph De Vincentis a démontré que, si n est supérieur à 8, alors $f(n)$ est plus grand que 1. Voici son raisonnement : on peut regrouper des carrés 2×2 et 3×3 pour former des rectangles 2×6 et 3×6 qui peuvent à leur tour être assemblés en rectangles $6 \times m$ pour tout m supérieur à 1.

En conséquence, tout carré de côté au moins 8 peut être découpé en quatre blocs (a) un carré 6×6 ; (b) un carré



7. Les découpages parfaits. Les découpages d'un carré en carrés tous différents (appelés découpages parfaits) sont difficiles à trouver. En 1939, R. Sprague proposa pour la première fois un découpage parfait d'un carré en 55 carrés plus petits. En 1948, un découpage parfait d'un carré en 24 carrés plus petits fut découvert par Willcocks. Enfin, en 1978, A. Duivestijn trouva un découpage parfait d'un carré en 21 carrés plus petits. On sait maintenant que ce record ne peut être battu, mais assez peu de choses sont connues sur ces découpages parfaits et, en particulier, sauf pour quelques valeurs de n , on ignore le nombre existant de découpages parfaits d'un carré en n carrés plus petits.