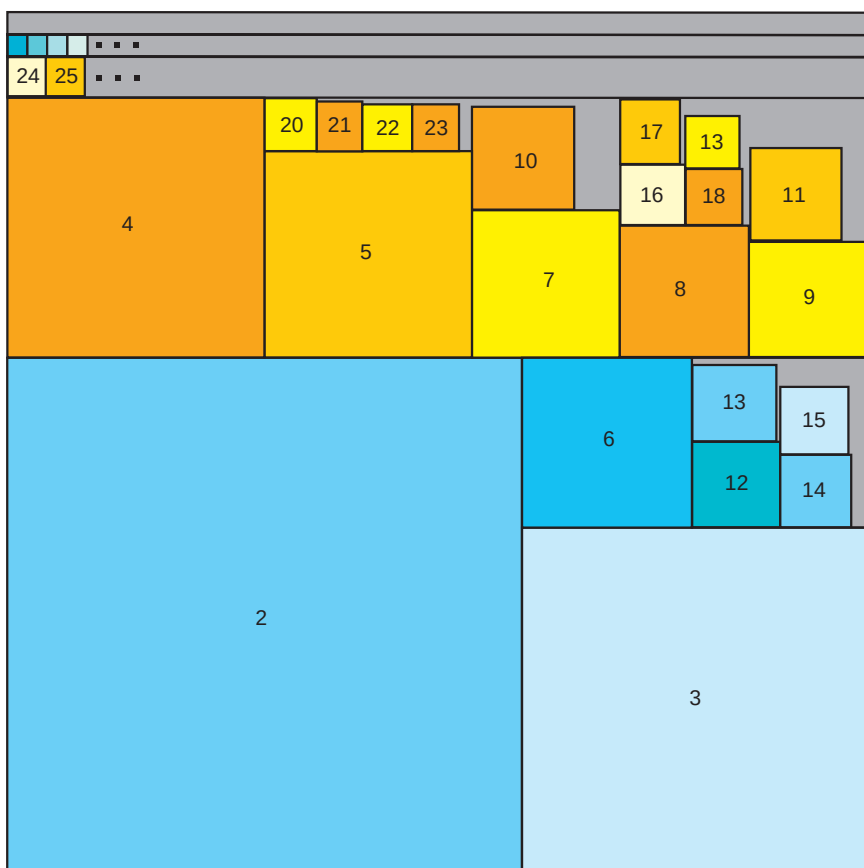




8. Un carré pour la somme des inverses des carrés. La série des inverses des carrés $1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$ vaut $\pi^2/6 - 1$. Le mathématicien Leo Moser, remarquant que cette somme était inférieure à $(5/6)^2$, proposa qu'on essaie de ranger tous les carrés de côté $1/2, 1/3, 1/4$, etc. dans le carré de côté $5/6$. Cela a été fait par Erich Friedman, qui a aussi rangé tous les carrés de côté $1, 1/2, 1/3, \dots$ (dont la surface totale est $\pi^2/6$) dans le rectangle : $1 \times (1 + 1/2 + 1/7 + 1/195) = 1,6479\dots$ supérieur à $1,64493\dots$, soit $\pi^2/6$, qui laisse moins de 0,2 pour cent de place inoccupée.

$(n - 6) \times (n - 6)$; (c) et deux rectangles $6 \times (n - 6)$, qui peuvent être eux-mêmes découpés en n'utilisant que des carrés de côté 2×2 et 3×3 . Donc, si n est supérieur à 8, on peut, en utilisant des carrés de côté 2, 3, 6 et $n - 6$, paver entièrement le carré de côté n , ce qui signifie que $f(n)$ est plus grand que 1.

Une généralisation de cette démonstration montre que si n est supérieur à $2k^2$, alors nécessairement $f(n)$ est supérieur à k , ce qui permet donc de savoir que $f(n)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. D'autres suites associées aux découpages d'un carré en carrés sont présentées à : www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1298.html

PARTITION PARFAITE D'UN CARRÉ EN CARRÉS

Dans les découpages précédents, nous autorisons l'utilisation de plusieurs exemplaires du même carré. Les découpages d'un carré en carrés tous différents (appelés découpages parfaits) sont bien plus difficiles à trouver et, à vrai dire, on a pen-

sé longtemps pensé qu'il n'en n'existerait pas. Si aucun regroupement des carrés du découpage en rectangles n'est possible, on dit que le découpage est simple.

C'est en 1939 que R. Sprague proposa pour la première fois un découpage parfait (et simple) pour un carré en 55 carrés plus petits. Un peu plus tard, en 1948, un découpage parfait d'un carré en 24 carrés plus petits fut découvert par Willcocks. Enfin, en 1978, A. Duijvestijn trouva un découpage parfait d'un carré en 21 carrés plus petits (voir la figure 7).

On sait aujourd'hui que le découpage parfait du carré en 21 est unique et qu'aucun nombre inférieur à 21 ne convient. Le découpage en 21 se note [50, 35, 27], [8, 19], [15, 17, 11], [6, 24], [29, 25, 9, 2], [7, 18], [16], [42], [4, 37], [33] (on regroupe les carrés adjacents ayant un de leurs côtés supérieurs aligné, en faisant l'énumération de haut en bas et de gauche à droite).

On a découvert trois découpages parfaits d'un carré de côté 110. Ce sont (en utilisant la notation précédente) : [60, 50], [23, 27], [24, 22, 14], [7, 16], [8, 6], [12, 15], [13], [2, 28], [26], [4, 21, 3], [18], [17], soit 22 carrés, découpage décou-

vert par A. Duijvestijn. Le second découpage est : [60, 50], [27, 23], [24, 22, 14], [4, 19], [8, 6], [3, 12, 16], [9], [2, 28], [26], [21], [1, 18], [17], soit 22 carrés, découvert par Willcocks, et enfin le troisième, [44, 29, 37], [21, 8], [13, 32], [28, 16], [15, 19], [12, 4], [3, 1], [2, 14], [5], [10, 41], [38, 7], [31] (23 carrés, découvert par A. Duijvestijn).

L'utilisation des ordinateurs a permis de savoir que le nombre de découpages parfaits et simples en 21 est 1 (unicité, comme nous l'avons mentionné), en 22 est 8, en 23 est 12, en 24 est 26, en 25 est 160 et 26 est 441 (cette suite est, bien sûr, l'une des suites répertoriées par N. Sloane dans son encyclopédie). Au-delà, les valeurs ne sont pas connues. Qui les calculera ?

UN DÉCOUPAGE INFINI DE CARRÉS

Pour terminer, voici un problème assez difficile de rangement infini. Chacun sait que la série des inverses des carrés $1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$ est convergente et que sa somme vaut $\pi^2/6 - 1$. Cela suggère de ranger tous les carrés de côté $1/2, 1/3, 1/4$, etc., dans un grand carré de côté le plus petit possible. Leo Moser, remarquant que $1/2^2 + 1/3^2 + \dots$ est égal à $\pi^2/6 - 1$, inférieur à $(5/6)^2$, qui vaut $0,69444\dots$, proposa qu'on essaie de ranger tous les carrés de côté $1/2, 1/3, 1/4$, etc. dans le carré de côté $5/6$. Cela a été fait par Erich Friedman, qui a aussi réussi à ranger tous les carrés de côté $1, 1/2, \dots$ dans le rectangle : $1 \times (1 + 1/2 + 1/7 + 1/195) = 1,6479\dots$ supérieur à $1,6449\dots$ ($\pi^2/6$). Ces deux records ne demandent qu'à être battus...

Bernard DUVILLIÉ, *Sur les traces de l'Homo mathematicus. Les mathématiques avant Euclide*, Ellipse, Paris, 2000.

Greg FREDERICKSON, *Dissection Plane and Fancy*, Cambridge University Press, 1997.

Erich FRIEDMAN, *Integer square tilings* ; www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1298.html

Erich FRIEDMAN, *Harmonic Series of Polygons* : www.stetson.edu/~efriedma/harmonic/

Joe FIELDS, *A Small Puzzle* : www.math.uic.edu/~fields/puzzle/puzzle.html

Eric WEISSTEIN, *Perfect Square Dissection* : mathworld.wolfram.com/PerfectSquareDissection.html

Greg Frederickson, *Geometric dissections on the web* : www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book/webdiss.html

David Eppstein, *The Geometry Junkyard, Dissection* : www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/dissect.html

Épistémologie

Quand la science a dit... c'est impossible

Jean-Michel Alimi, Gilles Dowek, Laurence Rolland, sous la direction de Nayla Farouki. Éditions Le Pomnier, 1999 (160 pages, 149 francs).

Impossible, nous le savons, n'est pas français, mais est-ce scientifique ? Science et impossible, c'est à cette réflexion récurrente – on se reportera avec intérêt à la série d'articles sur ce thème parus dans *Pour la Science* entre 1994 et 1996 –, mais toujours passionnante, que nous convient trois scientifiques et une philosophe, maître d'œuvre de l'ensemble.

Dans la partie consacrée aux mathématiques, arrêtons-nous à deux exemples. En premier lieu, le problème de la quadrature du cercle et la démonstration de son impossibilité. Avec Gilles Dowek, nous parcourons le long chemin qui mène des premières évaluations empiriques du nombre π par les Babyloniens et par les Égyptiens jusqu'aux résultats plus récents de théorie des nombres : en 1837, par exemple, le mathématicien Pierre Wantzel (1814-1848) montre qu'avec les nombres algébriques (ceux qui sont racine d'une équation polynomiale à coefficients entiers, telle $3x^2 - 1 = 0$), on peut mesurer tous les segments construits à l'aide de la règle et du compas ; en 1882, Ferdinand Lindemann (1852-1939) prouve que π n'est pas algébrique, de sorte qu'on ne peut pas construire π à la règle et au compas. La question de la quadrature du cercle est alors... réglée : elle est impossible.

Dans le cas de la quadrature du cercle, l'impossibilité est «logique» : elle ne serait remise en cause que si l'on réfutait la notion de nombre algébrique. Le cas de l'«axiome des parallèles» pose un problème de type différent. Ce postulat de la géométrie euclidienne (par un point extérieur à une droite, il ne passe qu'une droite parallèle à la première droite) «interdit» la présence en un point de plusieurs parallèles à une droite. Après Euclide, cet axiome a été considéré par de nombreux mathématiciens comme un théorème que l'on devait pouvoir démontrer, jusqu'à ce que, en 1872, Felix Klein (1849-1925) démontre que la proposition est indémontrable à partir des quatre premiers axiomes d'Euclide. Cette impossibilité, non plus logique mais axiomatique, reposait sur son «évidence» et sur toutes les conclusions qui en furent tirées. Ce qui n'empêcha pas, quand on changea



Le principe d'incertitude de Werner Heisenberg (1901-1976) énonce une impossibilité.

la nature de l'espace considéré, l'émergence des géométries non euclidiennes (sur une sphère, par exemple, les «droites» sont les grands cercles, et il n'existe aucune parallèle à une «droite» passant par un point extérieur à la droite).

Les exemples tirés des autres disciplines sont moins convaincants, sans doute parce qu'elles valident différemment leurs résultats.

Dans le chapitre sur «Les espèces et leur évolution», Laurence Rolland écrit ainsi : «La théorie de l'évolution rend donc impossible toute définition de l'espèce – puisqu'elle «bouge» – et, par conséquent, toute classification des êtres vivants.» Plus loin : «[On peut] d'une certaine manière définir les espèces car les critères choisis sont bien stables à l'échelle humaine.» On en revient donc à la réflexion de Jean-Baptiste Lamarck (1744-1829), citée par l'auteur : «[Les espèces] ne sont invariables que temporairement.» Écrire plus loin «...il est impossible de définir avec *précision* une espèce» ne fait que reprendre une proposition du début du chapitre et n'amène rien sur les limites, sinon sémantiques, de la théorie de l'évolution.

Le chapitre consacré à la génération spontanée est bien documenté historiquement, mais c'est en catastrophe, dans une dernière phrase qui demanderait pour le moins à être plus discutée, que l'auteur introduit le mot «impossible» : «Si la vie est un phénomène spécifique à notre planète, alors l'étude de son origine devient *impossible*.»

Dans le chapitre «À quoi ressemble une protéine», L. Rolland décrit la structure des protéines, le phénomène de leur repliement, et elle conclut qu'il est impossible de déterminer la forme, la structure spatiale des protéines à partir de leur composition en acides aminés. Il est bien difficile de dire si cette impossibilité n'est qu'une limite actuelle de nos connaissances en ce domaine, ou s'il s'agit d'une impossibilité plus fondamentale. L'auteur,

optimiste, pense qu'il devrait être possible de dégager les règles du repliement des protéines à partir de toutes les informations stockées dans les banques de données. Un tel acte de foi eut un précédent malheureux au XIX^e siècle : Marc-Antoine Gaudin qui fut le premier, en 1831, à comprendre clairement la distinction entre atomes et molécules, publia en 1873 *L'architecture du monde des atomes*, un essai où il cherchait à relier la structure des cristaux à celle des molécules ; Jean Jacques, chimiste au Collège de France, a écrit de cet ouvrage qu'il relevait de la plus pure fantasmagorie.

Le «principe d'incertitude» de Werner Heisenberg est plusieurs fois mentionné dans la partie consacrée à «l'électron délocalisé» (Jean-Michel Alimi), ainsi que dans l'introduction et dans la préface du livre. On le trouve presque toujours cité sous une forme qui laisse perplexe le bien modeste chimiste que je m'honore d'être : on lit qu'il est «impossible de mesurer simultanément la vitesse et la position d'une particule». Étonnante déclaration : le principe de Heisenberg, si je l'ai bien compris, interdit de mesurer simultanément ces deux grandeurs *avec autant de précision que l'on souhaite*, la limite de précision étant donnée par une formule précise ; on trouve dans la même page les deux formulations, qui semblent donc équivalentes pour l'auteur. Or il me semble que la première formulation est non seulement inexacte, mais dangereuse d'un point de vue épistémologique, car elle conduit facilement à gloser sur l'«indétermination» des phénomènes physiques que le principe ainsi énoncé peut sembler justifier.

Au total, les exemples proposés sont tous intéressants, mais, bien souvent, ils se raccrochent difficilement au titre du livre, qui se veut fédérateur. On regrettera donc que l'accent n'ait pas été mis davantage sur d'autres exemples où des scientifiques ont dit «c'est impossible» pour recevoir, plus ou moins longtemps après, un démenti très positif, puisqu'il révélait une nouvelle avancée du champ des connaissances scientifiques.

Ainsi des scientifiques parmi les meilleurs ont longtemps considéré comme impossible la supraconduction à haute température. Ainsi, en 1950, un excellent astronome dénonçait «les illusions de la navigation astronautique». L'histoire de la chimie est également édifiante : en chimie organique, la croyance en une «force vitale», quasi divine, interdisait d'envisager la synthèse de composés présents dans des organismes vivants. Il fallut que Friederich Wöhler réalise en 1828 la synthèse de l'urée «sans l'aide d'un rein, que ce soit celui d'un homme ou d'un chien», pour que s'ouvre le domaine extraordinaire de la synthèse organique.