

sentée par un des neuf sous-quadrillages. Par exemple, la partie qui commence par un marquage de la case supérieure gauche, par le joueur X, est représentée par un sous-quadrillage où la case supérieure gauche est marquée d'un X. Ce sous-quadrillage montre donc la partie après le premier coup. Chaque sous-quadrillage porte ainsi une croix dans une case particulière.

Examinons maintenant le sous-quadrillage où une croix apparaît dans le coin supérieur gauche. Le joueur O peut marquer n'importe laquelle des huit cases restantes. Aussi subdivise-t-on le sous-quadrillage en neuf sous-sous-quadrillages, afin de représenter les huit coups possibles du second joueur ; évidemment, ces sous-sous-quadrillages ont tous une croix dans la case supérieure gauche, et un O dans des cases différentes.

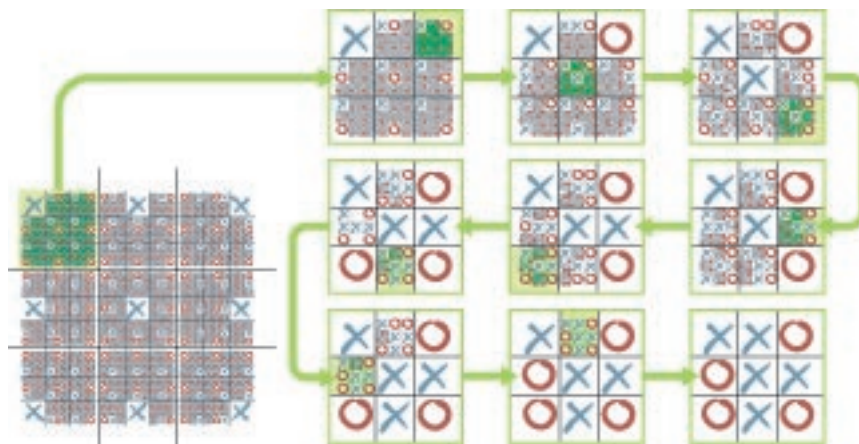
On peut continuer ainsi, en marquant tous les coups possibles dans des quadrillages de plus en plus petits. La figure finale a une structure quasi fractale, car les règles de construction sont récursives : les coups possibles à chaque étape sont les coups précédents. La fractalité n'est pas parfaite, car le jeu s'achève après un nombre fini de coups.

Examinons maintenant l'aspect logique. La forme la plus simple de logique mathématique classique est le calcul des propositions, qui considère des propositions qui sont vraies (on les note 1) ou fausses (0). Par exemple, la proposition P «Les poules ont des dents» a une valeur de vérité 0, car elle est fausse ; en revanche, la proposition Q «L'Afrique est un continent» a la valeur de vérité 1. On compose des propositions à l'aide d'opérateurs logiques tels que ET et OU. Avec les propositions P et Q précédentes, la proposition P ET Q est : «Les poules ont des dents et l'Afrique est un continent» ; elle est fausse (sa valeur de vérité est 0). On représente ainsi les valeurs de vérité de P ET Q par un tableau :

P	Q	P ET Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

On change la valeur de vérité d'une proposition quand on lui applique l'opérateur NON : NON P est une proposition fausse si la proposition P est vraie, et *vice versa*.

Il existe 16 tables de vérité possibles, pour deux propositions. On peut les désigner par des nombres à quatre chiffres binaires : 0000, 0001, 0010, 0011, etc. jusqu'à 1111 (en notation décimale, ces



2. Les parties possibles au jeu de ticktacktoe se représentent par une structure quasi fractale. Le quadrillage principal est subdivisé en quadrillages, eux-mêmes subdivisés, et ainsi de suite.

nombres sont 0, 1, 2, ..., 15). Cette liste conduit à une autre quasi-fractale. Pour la dessiner, on dessine un quadrillage de 16 cases de côté et on ajoute une bordure au-dessus de la ligne supérieure, afin d'identifier les colonnes avec les 16 nombres binaires (voir la figure 1). Puis on ajoute une bordure analogue sur la gauche, afin de numéroter les lignes. On choisit 16 couleurs différentes pour représenter les 16 nombres binaires, et on colorie les bordures. Choisissons maintenant un opérateur logique : par exemple, la barre de Sheffer, qui est représentée par le symbole « $|$ ». En informatique, cet opérateur est nommé NAND, car $P | Q$ est égal à NON(P ET Q). Sa table de vérité est :

P	Q	$P Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Pour chacune des cases du quadrillage 16×16 , utilisons pour la proposition P le numéro (à quatre chiffres binaires) de la ligne de la case, pour la proposition Q le numéro de la colonne de la case. Puis appliquons l'opération NAND, et cherchons les valeurs de vérité correspondantes. On obtient un nombre à quatre chiffres binaires, dont on cherche la couleur correspondante, que l'on utilise pour marquer la case du quadrillage 16×16 .

Par exemple, considérons la case de la cinquième ligne et de la onzième colonne. En notation binaire, ces numéros sont 0101 et 1011. En les utilisant respectivement pour P et Q , dans la table de vérité de $P | Q$, on obtient :

P	Q	$P Q$
0	1	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Le nombre de la dernière colonne est 1110, soit 14 en notation décimale. On colorie la case de la cinquième ligne et de la onzième colonne avec la couleur numéro 14.

Le résultat de ces calculs laborieux est représenté sur la figure 1. Les cases vertes, correspondant au nombre 1111, engendrent une forme très similaire à la structure de Sierpinski. Au lieu de colorier la figure, on peut aussi former une surface en codant le nombre calculé par une élévation. Par exemple, la hauteur de la case de la cinquième colonne et de la onzième ligne serait 0,875 (on divise 14 par 16 pour obtenir des valeurs comprises entre 0 et 1). De telles surfaces sont ce que l'on nomme des solides de valeurs. Dans le solide associé à l'opérateur de Sheffer, on voit clairement une structure de Sierpinski. La raison est simple : tout système formel qui se fonde sur la récursivité, jeu ou table de vérité, est à la base d'une quasi-fractale.

Réactions

En réponse à mon article sur les bœufs du soleil, Chris Rorres, de l'Université Drexel, me signale une solution de A. Nygrén, de l'Université d'Oulu (Finlande). A. Nygrén a décrit un algorithme qui décrit le problème en moins de cinq secondes, sur un ordinateur personnel équipé d'un microprocesseur Pentium II, où l'on exécute les programmes *Mathematica* ou *Maple*. Le site de C. Rorres conduit à cet algorithme (www.mcs.drexel.edu/~crrorres/Archimedes/Cattle/Solution2.html).



Marchons avec entrain

ROLAND LEHOUCQ

Le marcheur économise son énergie lorsque le balancement des jambes tire parti de l'action de la gravité.

Dis papa, c'est encore loin? «Tais-toi et marche!». Ainsi gourmands, les enfants perçoivent la marche comme une activité pénible et ennuyeuse. Ce mouvement, qui nous paraît naturel, ne l'est pas pour les bébés qui en acquièrent les compétences : la maîtrise de cette perte d'équilibre rattrapée de justesse demande des mois d'entraînement. En grandissant, l'enfant marche de manière plus naturelle, avec une régularité de mouvement analogue à celle d'un pendule. Par une analyse de sa mécanique, nous comprendrons mieux l'intérêt d'un pas pendulaire, «naturel», économe en énergie.

La jambe est assimilable à une tige rigide qui pivote autour de la hanche. Sous le seul effet de la gravité, ce pendule oscille avec sa période propre, le temps mis pour faire un aller-retour, période proportionnelle à la racine carrée de la longueur. Galilée avait constaté ce phénomène, nommé isochronie, exact pour des petites oscillations du pendule.

Comme pour la plupart des phénomènes régis par la gravité, la masse de la jambe n'intervient pas (si l'on néglige les frottements). En effet, la variation de

l'énergie cinétique ($\frac{1}{2}mv^2$, où m est la masse et v la vitesse) est égale à celle de l'énergie potentielle (mgh , g étant l'accélération de la pesanteur et h la hauteur dont s'élève le pendule par rapport à sa position au repos), de sorte que la masse m s'élimine.

Une jambe de 90 centimètres a une période d'oscillation pendulaire d'environ 1,6 seconde. En marchant au rythme d'un pas toutes les demi-périodes, soit 0,8 seconde, on laisse la gravité faire l'essentiel du travail nécessaire au mouvement de la jambe, ce qui apparaît le plus économique. Si le rythme réel de la marche est plus difficile à définir, car il dépend de nombreux facteurs (la forme de la jambe, le mouvement des articulations, le temps de contact avec le sol), il est facile de se convaincre que le balancement naturel de nos jambes adopte une cadence voisine de la demi-période pendulaire.

Quelle est la vitesse d'un marcheur? C'est le quotient de la longueur a du pas et du temps mis pour l'effectuer ($v = a/T$). La longueur du pas, qui dépend évidemment de la longueur de la jambe, c'est-à-dire de la taille du marcheur, est le pro-

duit de la longueur de la jambe et de l'amplitude de l'angle qu'elle balaie. Ainsi, le pas d'un habitant de Brobdingnag, les géants de plus de 20 mètres de haut rencontrés par Gulliver lors de ses voyages, mesure environ 9 mètres, à peu près douze fois le pas moyen d'un homme (0,75 mètre). Comme la période du balancement varie comme la racine carrée de la longueur de la jambe, la vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la dimension de la jambe.

Les personnes de grande taille ont donc une vitesse de marche naturelle supérieure. Les enfants en font l'expérience tous les jours : deux fois plus petits qu'un adulte, ils marchent 1,4 fois moins vite. Autre exemple : une mouche se déplace au sol à environ 10 centimètres par seconde. En marchant à 5 kilomètres par heure, nous parcourons 1,4 mètre en une seconde, 14 fois plus que la mouche. Notre allure serait identique à celle de la

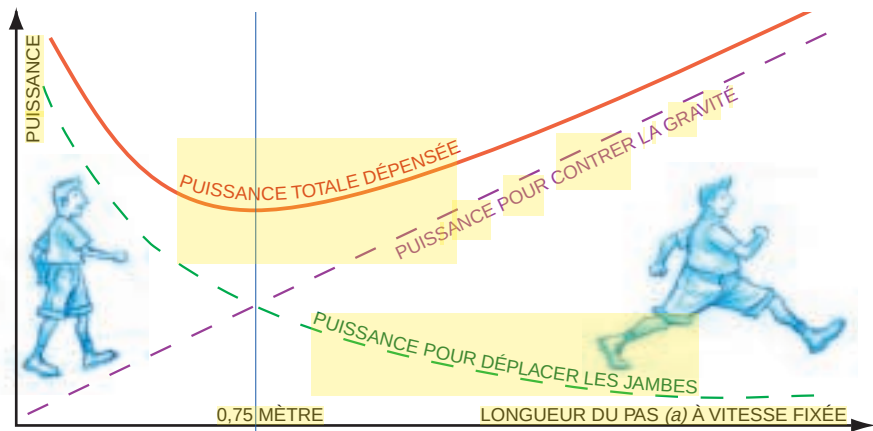


Les grands marchent plus vite que les petits, car la vitesse de marche «naturelle» varie comme la racine carrée de la longueur de la jambe. En



revanche, la vitesse de course ne dépend pas de la longueur, mais de la section de la jambe : grands et petits courent à la même vitesse.

Dessins Bruno Vaccaro



Lorsque l'on marche, on pivote autour du pied, de sorte que la hanche s'élève périodiquement (à gauche). La puissance à dépenser pour marcher à vitesse donnée est alors la puissance nécessaire à l'élévation périodique du corps plus celle nécessaire à l'accélération et à la décé-

lération des jambes (courbes). Comme ces puissances varient en sens inverse en fonction de la longueur du pas, il existe un pas optimal (0,75 mètre pour une vitesse de 5 kilomètres par heure et pour un marcheur de 70 kilogrammes) où la puissance dépensée est minimale.

mouche si nous mesurons 1/200 de notre taille réelle, soit environ 0,9 centimètre. Remarquons au passage que le nombre de pattes ou de jambes n'intervient pas : le «mille-pattes» ne se déplacerait pas plus vite s'il n'avait que quatre pattes.

De telles modélisations ont permis d'estimer la vitesse de déplacement de dinosaures en mesurant la longueur de leur pas sur des empreintes fossilisées et en estimant leur taille à partir des ossements. Ainsi le Tricératops avançait à la vitesse du Rhinocéros, environ sept mètres par seconde, et l'homme, s'il avait vécu à la même époque, aurait pu lui échapper.

LA COURSE

En courant, ce n'est plus la gravité qui engendre le mouvement périodique des jambes, mais le travail des muscles de la cuisse : le pas «forcé» est différent du mouvement pendulaire naturel. La force totale qu'exerce un membre dépend du nombre de fibres qu'il contient, c'est-à-dire de sa section. Le travail d'un membre, le produit de la force exercée par la longueur d'extension des muscles, est proportionnel à son volume, donc à sa masse. La période d'oscillation forcée des jambes pendant une course augmente avec leur longueur (à section de jambe donnée). La vitesse de course est alors à peu près indépendante de la longueur de la jambe, puisque c'est le quotient de la longueur du pas et de la période d'oscillation, toutes deux proportionnelles à cette longueur de jambe.

Ainsi, les grands ne courent pas sensiblement plus vite que les petits, excepté si la différence de musculature est notable. Notons aussi qu'en courant nous plions la jambe afin de mieux l'adapter à un balancement pendulaire plus rapide (elle est ainsi raccourcie). Pour déterminer le pas optimal, on minimise la puis-

sance nécessaire à la marche. Quelle énergie doit dépenser une personne qui marche sur une surface horizontale pour maintenir une vitesse constante ? À chaque fois qu'un pied se pose sur le sol, il est momentanément à l'arrêt alors que le reste du corps poursuit son déplacement. Quand ce pied quitte le sol il faut que toute la jambe soit accélérée vers l'avant afin qu'elle rattrape son retard ; elle sera ensuite décélérée jusqu'au moment où le pied se posera à nouveau sur le sol.

Pendant ces phases d'accélération et de décélération, deux ensembles de muscles antagonistes agissent successivement sur la jambe, chacun d'entre eux engendrant un travail égal à la variation de l'énergie cinétique du membre. Le travail des muscles qui propulsent la jambe est proportionnel au produit de la masse de la jambe (que l'on peut supposer proportionnelle à la masse M du corps) par le carré de la vitesse v du marcheur (Mv^2). Pour obtenir la puissance musculaire dépensée pour mouvoir les jambes, il suffit de multiplier le travail des muscles par la fréquence du pas, c'est-à-dire par le quotient de la vitesse et de la longueur du pas (v/a). La puissance nécessaire au mouvement des jambes est ainsi proportionnelle à Mv^3/a .

En plus de ce travail, les muscles doivent aussi fournir l'énergie gravitationnelle nécessaire à l'élévation périodique du centre de gravité du corps entre chaque pas. Ce travail est égal au produit de la masse du corps par l'accélération de la pesanteur et par l'élévation de hauteur (Mgh). Cette dernière est d'autant plus grande que l'amplitude du pas est grande et varie comme le rapport a^2/L , où L est la longueur de la jambe. La puissance correspondante, obtenue en multipliant ce travail par v/a , est donc proportionnelle à $Mgva/L$. Au final, la puissance à fournir par les muscles est la somme de deux termes,

l'un correspondant à la puissance nécessaire pour mouvoir les jambes, qui subissent une succession d'accélération et de décélérations, l'autre traduisant la puissance à fournir pour vaincre la pesanteur. Si l'on allonge le pas à vitesse constante le premier terme diminue alors que le second augmente.

Ainsi, il existe un pas de longueur optimale qui minimise la puissance totale à fournir. La longueur trouvée par cette méthode correspond au pas de la fréquence naturelle pendulaire : elle est proportionnelle au produit de la vitesse du marcheur par la période du pendule associé à la jambe. La puissance dépensée sera donc plus grande quand on marche plus vite (ce qui semble normal), mais aussi quand on se déplace à faible vitesse (ce qui est plus inattendu). Pour une vitesse de 5 kilomètres par heure, le pas optimal mesure environ 75 centimètres pour un marcheur de taille moyenne et le marcheur consomme environ 250 watts (la puissance de trois lampes électriques).

Dans le cas d'une montée, il faut tenir compte du travail pour compenser l'augmentation de l'énergie potentielle de pesanteur. Pour monter de 300 mètres et si votre poids est de 70 kilogrammes, le travail à fournir est d'environ 210 000 joules. Comme votre rendement n'est pas égal à un, mais plutôt de 40 pour cent, ce travail est 500 000 joules, soit approximativement 125 kilocalories, c'est-à-dire un bon bifteck... Il est difficile de maigrir.

Roland LEHOUCQ est astrophysicien au Service d'astrophysique du CEA.

D'ARCY THOMSON, *Forme et croissance*, Seuil, collection Sources du savoir, 1999.

A. BELLEMANS, *Power demand in walking and pace optimization*, in *American Journal of Physics*, vol. 49, p. 25, 1981.