

5. La loi de l'inutilité des preuves complexes

Vladik Kreinovich et Luc Longpré ont prouvé, en utilisant les concepts et méthodes de la théorie de la complexité, que :

- Si un résultat est potentiellement utile, alors il n'est pas possible qu'il possède une preuve complexe.

Leur travail a comporté plusieurs étapes.

- Formulation d'une définition mathématique de la notion de résultat potentiellement utile. Selon eux, un résultat est utile s'il permet de prouver le bon fonctionnement d'un algorithme et qu'on ne peut pas substituer à cet algorithme un algorithme probabiliste (c'est-à-dire fonctionnant avec un risque d'erreur aussi petit qu'on le souhaite) dont le bon fonctionnement soit simple à établir.

- Formulation d'une définition mathématique de la notion de preuve complexe. Leur définition prend en compte à la fois le nombre d'étapes élémentaires de raisonnement de la preuve et les possibilités de simplification dues à d'éventuelles parties répétitives. Pour eux, une preuve complexe est une preuve longue, et qui le reste même après exploitation des parties répétitives.

- Utilisation de la théorie de la complexité pour prouver leur affirmation.

Le résultat de Kreinovich et Longpré est un exemple récent provenant de la théorie de la complexité de résultats mathématiques ayant un contenu philosophique intéressant et inattendu. Il est probable qu'il déplaira aux mathématiciens qui aiment justifier leurs travaux, même les plus difficiles, en évoquant de possibles applications futures.

tentons tout de même de le présenter, il en vaut la peine.

Les deux chercheurs, pour arriver à leur résultat, ont d'abord donné une définition mathématique de la notion de résultat potentiellement utile.

Pour eux, un tel résultat est un énoncé S , qui permet d'établir une formule du type «pour tout x , $P(x)$ », où $P(x)$ est facilement vérifiable (par exemple, une formule du type «si la somme des chiffres de x est un multiple de 9, alors x est un multiple de 9»).

Leur définition est justifiée, car ce sont les résultats de ce type qui assurent que les méthodes algorithmiques fonctionnent correctement : algorithmes de codage, algorithmes de recherche dans une base de données, algorithmes de tri de données, algorithmes de calcul numérique, algorithmes de simulation, etc.

Ensuite les deux chercheurs définissent une preuve complexe d'une manière fine et subtile (voir la figure 5).

Leur résultat, formulé avec plus de précision, est : si S n'a que des preuves complexes et permet de montrer que «pour tout x $P(x)$ », alors pour la quasi-totalité des données de taille raisonnable (les seules qu'on rencontre en pratique) $P(x)$ est vrai indépendamment de S . En quelques mots : si S est complexe, et que $S \Rightarrow$ (pour tout x $P(x)$) alors, sauf de manière exceptionnelle, on n'a pas besoin de S pour savoir que $P(x)$ est vrai.

En très court, si S est complexe, alors ce n'est pas un résultat potentiellement utile.

Ce résultat s'applique en particulier à la conjecture de Riemann (un résultat qui concerne la répartition des nombres pre-

miers et qui est considéré comme l'énoncé mathématique irrésolu le plus recherché des mathématiques aujourd'hui). Il a été prouvé par G. Miller et E. Bach que, si une forme généralisée de l'hypothèse de Riemann était vraie, alors il existait un algorithme efficace (l'algorithme de Miller et Bach) pour tester la primalité des nombres entiers en temps polynomial, c'est-à-dire efficacement. Cette situation a conduit de nombreux mathématiciens à croire que les recherches sur l'hypothèse de Riemann étaient utiles, même dans une optique d'applications pratiques.

EST-IL VRAIMENT UTILE DE DÉMONTRER RIEMANN ?

La situation créée par l'algorithme de Miller est qu'on dispose sans doute d'un algorithme efficace de test de primalité dont le bon fonctionnement dépend de la vérité de l'hypothèse de Riemann généralisée. Ce qu'énonce le résultat de Vladik Kreinovich et Luc Longpré est : si vraiment l'hypothèse de Riemann généralisée ne possède pas de preuve simple, alors l'algorithme de Miller pour des entiers de tailles raisonnables fonctionne correctement pour la quasi-totalité des cas qu'on peut lui soumettre. On n'a donc pas besoin en pratique de la démonstration de l'hypothèse de Riemann généralisée si l'on désire utiliser cet algorithme.

Cette inutilité pratique de l'hypothèse de Riemann dans le cas des tests de primalité est d'ailleurs corroborée par l'usage informatique réel : dans les applications cryptographiques où l'utilisation des nombres premiers est intensive, on se sert le plus souvent des méthodes probabi-

listes de test de primalité, c'est-à-dire de méthodes dont le bon fonctionnement est justifié par un raisonnement relativement simple, mais qui ne donnent un résultat que d'une manière probabiliste, autrement dit avec un risque, jugé négligeable, d'erreur.

TOUT N'EST PAS TERMINÉ

Notons, pour l'amusement, que le résultat de Vladik Kreinovich et Luc Longpré possède une démonstration assez courte (environ une page) : il n'est donc pas impossible, d'après ce qu'il nous apprend, qu'il soit un résultat concrètement utile !

Notons aussi qu'en toute rigueur, malgré les longues recherches faites à son sujet, il n'est pas logiquement exclu que la conjecture de Riemann possède une démonstration simple. Si c'est le cas, l'hypothèse de Riemann pourrait être pratiquement utile. Nous devons continuer à en rechercher la preuve, même si l'intérêt mathématique pur ne nous semble pas une raison suffisante de nous y intéresser.

Précisons que, même si, après une traduction mathématique sous une certaine forme particulière, on a réussi à établir que le difficile est inutile, il ne faut pas donner une importance excessive au résultat de Vladik Kreinovich et Luc Longpré qui fixent, dans leurs définitions, le sens des mots peut-être un peu rapidement.

Dans le cœur de tous les mathématiciens est inscrite la conviction que plus c'est difficile, plus c'est beau et important, et donc utile au moins par l'approfondissement et une meilleure vision que cela procure à notre perception du monde des entités abstraites. «Le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain», écrivait le mathématicien Jacobi dans une lettre adressée à son collègue Legendre en 1830. Il est peu vraisemblable que le formalisme mathématique s'empare un jour de cette vérité philosophique-là !

G. BACHELARD, *La philosophie du non*, Presses Universitaires de France, Paris, 1940.

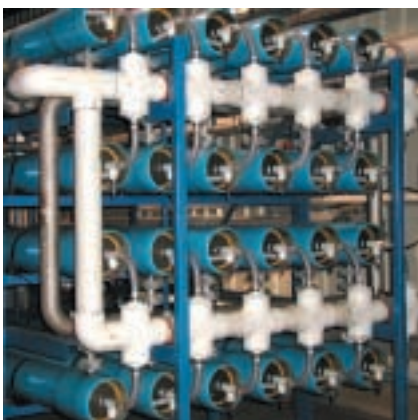
W. H. ZUREK, *Algorithmic Randomness and Physical Entropy*, in *Physical Review A*, n° 8, vol. 40, pp. 4731-4751, 1989.

The Philosophy of Mathematics, sous la direction de W. H. Hart, Oxford University Press, 1996.

Ming Li et Paul VITANYI, *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1997.

J.-P. DELAHAYE, *Information, complexité et hasard*, Hermès, Paris, 1999.

V. KREINOVICH et L. LONGPRÉ, *How Important Is Theory for Practical Problems ?*, in *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science (EATCS)*, n° 71, pp. 160-164, 2000.



Le droit au mélange

BERNARD CABANE • SYLVIE HÉNON

L'eau se déplace à travers les membranes par osmose. Ce phénomène permet de détruire les bactéries par déshydratation ou, en l'inversant, de dessaler l'eau de mer.

Aux temps héroïques de l'exploration pétrolière des régions tropicales, on protégeait de la gangrène les plaies infectées en les recouvrant de sucre, traitement encore utilisé aujourd'hui à l'hôpital pour les plaies profondes. Le sucre préserve aussi les confitures des proliférations bactériennes et le sel conserve viandes et poissons. Comment sel et sucre empêchent-ils la croissance bactérienne ? Par le phénomène d'osmose, important dans les mécanismes biologiques et industriels.

La plupart des bactéries sont des organismes unicellulaires. Remplies d'une solution aqueuse d'ions, d'acides aminés et de protéines, elles ne sont protégées de l'extérieur que par une membrane constituée d'une mince couche de lipides et de protéines, perméable à l'eau. Lorsque les bactéries sont plongées dans un milieu aqueux, l'eau entre et sort de la cellule à travers la membrane.

Plongeons une bactérie dans du sucre : comme il y a beaucoup plus de molécules de sucre à l'extérieur de la bactérie que de molécules à l'intérieur, la quasi totalité de l'eau traverse la membrane afin de diluer le sucre. La bactérie se déshydrate et meurt. En effet, selon le second principe de la thermodynamique, la situation la plus favorable est celle où les molécules d'eau se mélan-

gent équitablement avec toutes les autres molécules (les molécules internes à la bactérie et le sucre externe).

Inversement, le contact avec l'eau pure est dangereux pour les cellules de notre corps, parce qu'elles contiennent des liquides salés. Dans notre corps, elles sont en contact avec les fluides physiologiques, salés eux aussi. Si nous introduisons de l'eau pure dans un de ces fluides, nous déclenchons un transfert d'eau vers l'intérieur des cellules. Par exemple si, pour nettoyer nos yeux ou nos lentilles de contact, nous utilisons de l'eau pure au lieu d'une solution saline, en vertu de son «droit au mélange», l'eau passe dans les cellules de la cornée, ce qui crée un œdème.

L'ÉQUILIBRE OSMOTIQUE

Pour éviter que nos cellules ne gonflent ou ne dégonflent par des transferts d'eau intempestifs, les mélanges de l'eau avec les sels, à l'intérieur et à l'extérieur des cellules, doivent être équilibrés. Comme le métabolisme des cellules produit de l'eau, une régulation est nécessaire afin que notre teneur en eau n'augmente pas : cette régulation est assurée par les reins.

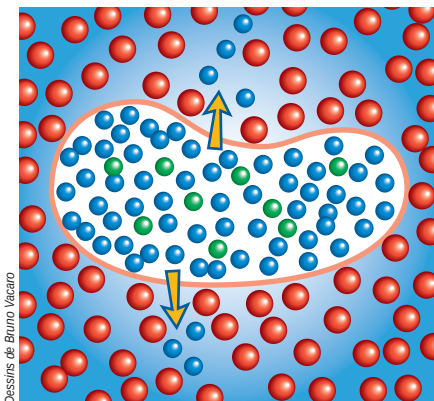
Si l'eau passe facilement à travers les membranes des cellules, le pas-

sage des sels et des molécules plus grosses est restreint. Ainsi, l'important pour l'équilibre osmotique n'est pas que les fluides interne et externe contiennent les mêmes composés en solution, mais que la proportion d'eau, en nombre de molécules, soit égale des deux côtés de la membrane. Par exemple, l'équilibre osmotique doit être assuré pour le sérum utilisé lors des perfusions, afin que les globules rouges du sang n'éclatent pas : on utilise des solutions salées, ou des solutions de glucose, qui nourrissent l'organisme tout en assurant son équilibre en eau.

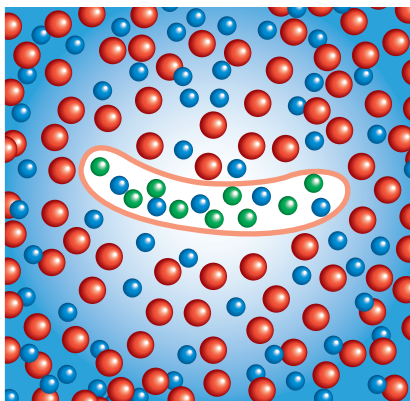
Loin du monde médical, la culture des tomates dans le désert illustre le maintien de l'équilibre osmotique ; comme l'eau douce y est rare, on arrose les plantations avec des saumures. La forte concentration en sels à l'extérieur des cellules végétales pourrait entraîner la sortie de l'eau cellulaire : afin d'éviter la déshydratation, les cellules végétales sécrètent une grande quantité de sucres ou d'acides aminés qui équilibrent les concentrations en eau à l'intérieur et à l'extérieur des cellules. Les tomates ainsi cultivées dans le désert sont plus sucrées que celles qui sont alimentées avec de l'eau douce.

Les cellules végétales diffèrent toutefois des bactéries ou de nos propres cellules car leur concentration interne en espèces dissoutes reste supérieure à celle du milieu extérieur : l'eau externe devrait alors entrer dans les cellules et les faire gonfler, mais la pression à l'intérieur de la cellule, supérieure à la pression extérieure, l'en empêche. L'application d'une pression s'oppose ainsi à l'osmose.

Peut-on reproduire ce phénomène à grande échelle ? Oui, à l'aide de membranes qui laissent passer l'eau, mais ni le sel, ni le sucre. Imaginons un récipient rempli d'eau pure divisé par une membrane en deux compartiments. Ajoutons du sucre dans un compartiment. L'eau se déplace alors vers le compartiment sucré toujours en vertu du «droit au mélange».



Dessins de Bruno Vacaro



Quand une bactérie est plongée dans une solution sucrée, la proportion d'eau à l'extérieur est inférieure à la proportion à l'intérieur (à gauche) : les molécules d'eau (boules bleues) traversent la paroi cellulaire jusqu'à rétablir l'équilibre. La bactérie se déshydrate et meurt (à droite).