



La sphère à cornes

ADRIEN DOUADY • LOÏC MANGIN

Une sculpture enchevêtrée nous entraîne dans les méandres de la topologie.

Dans le patio Sud du bâtiment du Centre de mathématiques et d'informatique de l'Université de Château-Gombert à Marseille trône une sculpture inhabituelle. Composée de matériaux polymères composites, elle est l'œuvre de Jean-Louis Lhermitte qui l'a nommée *La sphère à cornes*. Pourquoi une sphère, alors qu'elle ne ressemble en rien à la forme connue d'une orange ou de la Terre. Doit-on voir dans cette dénomination une bizarrerie d'artiste ? Non, elle est l'œuvre du mathématicien américain

James Alexander (1888 - 1971) qui a conçu cet objet en 1915.

D'une masse oblongue s'étendent deux prolongements, de la même façon que les bras prolongent le corps. Les deux extrémités de ces prolongements, en forme de portion d'anneaux, se ramifient également en deux plus petits arcs d'anneaux qui s'enlacent comme les doigts formant deux maillons ouverts d'une chaîne. À nouveau, les extrémités des "doigts" se ramifient, les extensions s'enlacent... (voir la figure 1), l'opération est répétée à l'infini pour l'objet théorique d'Alexander, d'un volume fini, qui a donc un caractère fractal : un agrandissement d'une région aux alentours d'un des points limites (les «extrémités ultimes» des ramifications) a la même apparence que l'ensemble tout entier. Dans la sculpture de J.-L. Lhermitte, les itérations à l'infini ne sont pas représentées, seules les cinq premières le sont : elles évoquent l'ensemble, comme toute représentation d'une fractale.

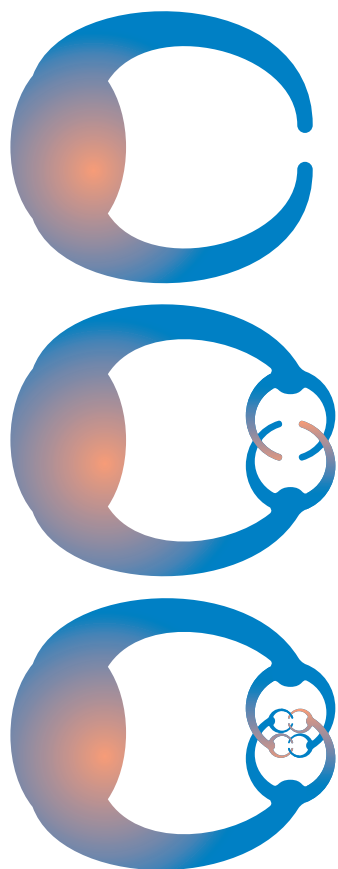
La topologie établit le rapport entre cet objet à l'allure végétale et une sphère ordinaire. La topologie est la science des objets en caoutchouc, donc déformables. Pour le topologiste, une chambre à air et une tasse à café sont équivalents ! Pourquoi ? Parce qu'il est possible de passer de l'une à l'autre par une transformation continue en poussant les parois en caoutchouc : le trou de la chambre à air devient l'anse de la tasse ; les deux objets sont des tores.

Dans des termes plus mathématiques, deux objets sont topologiquement équivalents (ou appartiennent à la même classe) lorsqu'il existe une bijection entre les points de la surface des deux objets : à chaque point de l'un correspond un point de l'autre. Cette définition est dite «intrinsèque», elle devient «plongée» quand une telle bijection existe aussi pour les régions délimitées — l'intérieur et l'extérieur — par les ensembles de points constituant les objets. Selon l'espace considéré, la première définition n'entraîne pas obli-

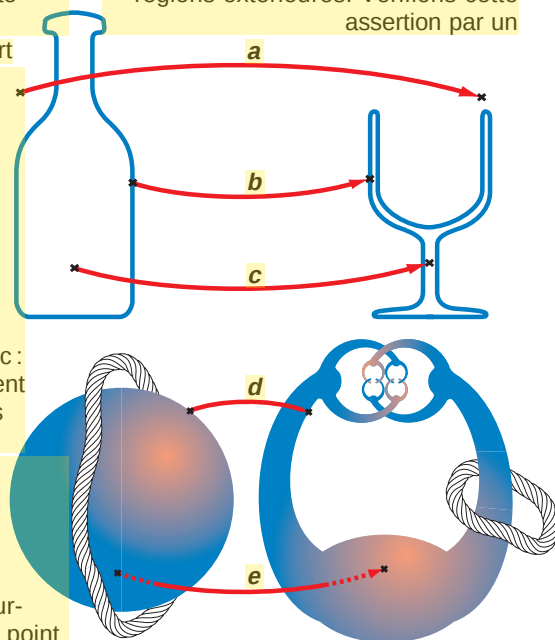
gatoirement la seconde : c'est ce que montre *La sphère à cornes*.

Dans un espace à deux dimensions, un plan, les deux définitions vont de pair. Cette alliance est au cœur du théorème de Jordan, du nom du mathématicien ardchois Camille Jordan (1838 - 1922), qui stipule qu'une courbe fermée simple, c'est-à-dire sans croisement, sépare ce plan en deux régions. On peut établir une bijection entre les deux régions délimitées par la courbe et celles délimitées par un cercle. En apparence évidente, la démonstration de ce théorème est ardue. Dans un espace à trois dimensions, le théorème n'est plus vrai : la sphère à cornes en est une illustration.

La surface d'une sphère ordinaire est en bijection avec la surface de la sphère à cornes. La bijection existe aussi entre le volume renfermé par ces deux surfaces. En revanche, ce n'est plus vrai pour les régions extérieures. Vérifions cette assertion par un



1. LA SPHÈRE À CORNES est obtenue par déformation d'une sphère ordinaire dont deux extensions en arcs d'anneaux se ramifient, les ramifications se scindent à leur tour en deux, et ce jusqu'à l'infini : on obtient ainsi un objet fractal. En vignette à côté du titre, la représentation de la sphère à cornes symbolise les dédales du cerveau prolifique de James Conway, mathématicien à l'Université de Cambridge.



2. DEUX OBJETS, telles deux courbes fermées (en haut), sont topologiquement équivalents lorsqu'il existe une bijection entre leurs périmètres et les deux régions du plan qu'ils délimitent (a, b et c). Cependant, l'extérieur d'une sphère ordinaire n'est pas en bijection avec celui de la sphère à cornes (en bas) : une ficelle fermée peut être séparée de la première, mais pas de la seconde.

raisonnement par l'absurde. Si une telle bijection existe, à un point de l'extérieur d'une sphère ordinaire correspond un point de l'extérieur de la sphère à cornes. Donc, à un ensemble de point correspond un autre ensemble de points. Prenons le cas où l'un de ces ensembles de points est une «ficelle» qui entoure les objets. Cette ficelle peut être séparée de la sphère ordinaire par une suite de positions. La bijection imposerait l'existence d'une autre suite de positions qui permettrait de séparer une ficelle de la sphère à cornes. Or, une ficelle qui entoure l'un des bras de la sphère à cornes ne peut pas quitter l'ensemble. Il n'y a donc pas de bijection entre les régions extérieures des deux objets (voir la figure 2).

En topologie, les mathématiciens classent des objets en fonction de différentes équivalences : selon la catégorie des objets étudiés et la relation d'équivalence choisie, on obtient différentes classifications. Pour les courbes fermées d'un plan, le théorème de Jordan montre qu'il n'y a qu'une seule classe de courbes fermées simples. Pour des surfaces considérées de façon intrinsèque (on ne s'intéresse pas aux régions qu'elles délimitent), les classes se distinguent selon le nombre p de trous des tores auxquels les surfaces sont équivalentes. Ainsi le tore (la chambre à air) à un trou diffère de la sphère à zéro trou et du bretzel à trois trous. Pour étudier les surfaces plongées dans un espace à trois dimensions, c'est-à-dire les régions délimitées par ces surfaces, l'exemple de la sphère à cornes montre que la classification devient très complexe en l'absence d'hypothèse de régularité : la sphère ordinaire est régulière, ou lisse, car un agrandissement d'une région quelconque est plan, tandis qu'un tel agrandissement d'une région de la sphère à cornes aux alentours des points limites montre de nombreux pics ; la sphère à cornes est irrégulière, voire «sauvage».

Pour des objets lisses, on définit trois relations d'équivalence : l'équivalence topologique (des bijections existent pour les objets eux-mêmes), l'équivalence différentiable (la bijection qui transforme un objet en l'autre est dérivable), et l'équivalence homotopique (elle requiert la notion de déformation continue). Pour les surfaces, des objets équivalents selon ces trois relations appartiennent à la même classe. En est-il de même pour des objets en trois dimensions ? Cette question est toujours non résolue : il s'agit de "l'hypothèse de Poincaré". Si vous la résolvez, vous gagnez un million de dollars.

Adrien DOUADY est mathématicien à l'Université d'Orsay.



Jean-Louis Lhermitte



Jean-Louis Lhermitte



Jean-Louis Lhermitte

3. La sphère à cornes (ici, vue sous plusieurs angles), trône dans un patio du Centre de mathématiques et d'informatique de Chateau-Gombert, à Marseille.