

auquel on arrive (que le putatif $\mathbb{N}$ doit contenir un entier infiniment grand) a beau être nécessaire au gré du raisonnement tenu, il ne peut pas être assumé dans le formalisme : si le prédicat «infiniment grand» était disponible dans le formalisme, on obtiendrait un paradoxe en appliquant le schéma d'induction à la classe des entiers finis ou à la classe des entiers infiniment grands. Par exemple, on dirait en substance que l'ensemble des entiers infiniment grands a un plus petit élément α , donc $\alpha - 1$ est fini, mais alors $\alpha - 1$ est aussi, d'où contradiction.

Tous les montages de l'analyse non standard nouvelle, jouant sur un entier infiniment grand sans passer sous les fourches Caudines de $\mathbb{R}$ ou de la théorie des ensembles, consistent à transformer le formalisme de la théorie des entiers pour que disparaissent ces paradoxes. L'usage du principe de récurrence devra, par exemple, être limité à des prédicats non bâtis au moyen de la notion d'entier «fini», «standard» ou «limité». Il résulte alors de tels dispositifs que les entiers infiniment grands apparaissent comme une classe insituable, intervenant sur la droite entière «après» ceux qui sont finis. Ils se distinguent des entiers standard, que l'on interprète désormais comme les «entiers constructifs», disons les entiers que l'on peut construire avec des ordinateurs, en imaginant ceux-ci suffisamment puissants.

L'infiniment grand

L'intention de ces théories non standard est ainsi de saisir l'infiniment grand comme l'excédent insituable au-delà du constructif. Ces théories idéalisent l'intuition des rapports entre entiers constructifs et entiers énormes, inaccessibles, rapports qui sont «concrètement» assez imprévisibles. Comme l'explique Jacques Harthong, les entiers constructibles ou accessibles sont nécessairement définis relativement à un langage de programmation choisi comme logiciel de production ou d'écriture de référence. Ainsi le nombre $10^\wedge (10^\wedge (10^\wedge (10^\wedge 10)))$, où $a^\wedge b$ désigne a^b , peut être calculé par un programme très simple, long d'une vingtaine de pas sur une calculatrice programmable : ce nombre est néanmoins gigantesque.



Des infinis aux visages différents

La notion d'infini a évolué avec les conceptions de l'analyse non standard. Abraham Robinson (à gauche) se fonde sur les ensembles infinis de la théorie des ensembles et sur l'axiome du choix pour produire un ensemble des hyper-réels dans lequel on trouve, en sus des nombres réels connus, des nombres infiniment grands et infiniment petits.

En reformalisant la théorie des ensembles, Edward Nelson (à droite) introduit la notion d'entité standard : les infiniment petits ou grands existent non pas comme nouveaux objets «ajoutés», mais parce que nous reconnaissons que, parmi les réels, existent nécessairement des éléments insaisissables.

Si Nelson relie l'infini à l'insaisissable et le fini à l'assignable, il revient au mathématicien Georges Reeb (à gauche) de fonder l'analyse non standard sur une sensibilité constructiviste. Autrement dit, à la suite de Reeb, on essaie de rapprocher le concept d'infini du concept d'incalculable. Les entiers standard sont alors les entiers «constructifs», ceux qu'on peut calculer à l'aide d'ordinateurs ou qui apparaissent au fil de l'énumération naïve.



Un nombre de même taille, mais n'ayant pas la même structure simple n'aurait aucune chance d'être programmable dans le même langage (à défaut de la structure, il ne resterait que la ressource d'écrire ses chiffres, mais il faudrait un nombre de symboles supérieur à celui des particules de l'Univers, et un temps dépassant la capacité de survie de tout vivant). La distribution des nombres «accessibles à la calculatrice programmable» est non régulière, tributaire des particularités du matériel symbolique et des opérations de base de la calculatrice considérée. La distribution des nombres qui apparaissent comme constructibles au sens de telle calculatrice programmable est donc clairsemée.

Dans le nouveau point de vue, l'analyse non standard est une systématisation théorique, indépendante de toute machine et de tout langage particuliers, des phénomènes que nous citons en exemple au début de l'article, lorsque nous remarquons que, pour les calculatrices, certains entiers finis jouent le rôle de l'infini. Si l'on comprend bien le concept de nombre fini accessible, constructif, on remarque que la pensée arithmétique contemporaine rend plausible une théorisation qualitative des entiers énormes qui leur donne un statut d'infini. Toutefois, dès que l'on dispose d'un contexte théorique d'arithmétique avec des entiers infiniment grands, on peut introduire un calcul sur des rationnels à dénominateur infiniment grand qui permet de retrouver, dans une certaine mesure, la mathématique du continu à laquelle nous sommes habitués. Alors, nous pourrions

faire de l'analyse non standard en justifiant les infiniment petits et les équations imparfaites des pionniers.

Pour y parvenir, il faut, encore une fois, faire valoir certains objets comme non assignables ou relativement mal assignés, des entiers énormes cette fois. Selon les stratégies intellectuelles, la justification de ce caractère non assignable peut être plus ou moins subtile et utiliser soit la philosophie intuitionniste de Brouwer, soit le théorème d'incomplétude de Gödel, soit un examen précis des possibilités des langages de programmation.

Les conceptions successives de l'analyse non standard ont en commun d'avoir tenté de faire jouer en plus, à côté ou à la place de la notion cantorienne d'infini de totalité, une notion d'indéfini, d'entité non assignable. Cette notion rend jusqu'à un certain point des services techniques comparables à ceux que rendaient les notions infinitésimales des pionniers. En tout cas, elle justifie *a posteriori* un usage intuitif de l'infinitésimal auquel les mathématiciens et les physiciens sont restés attachés.

Jean-Michel SALANSKIS est professeur de philosophie des sciences à l'Université Paris X (Nanterre).

J.-M. SALANSKIS, *Le constructivisme non standard*, Presses du Septentrion, 1999.

M. PANZA et J.-M. SALANSKIS, *L'objectivité mathématique*, Dunod-Masson, 1995.

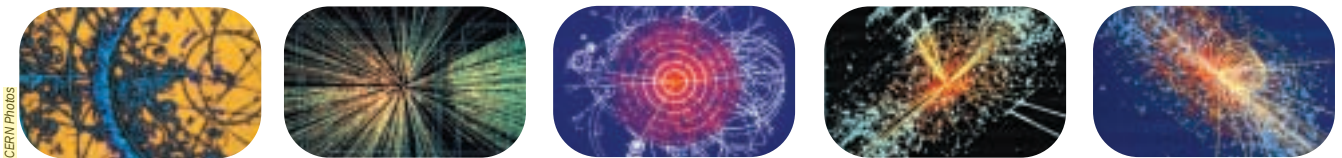
R. LALEMENT, *Logique, réduction, résolution*, Hermès, 1990.

F. DIENER et G. REEB, *Analyse non standard*, Hermann, 1989.

Les géométries non commutatives

DANIELA BIGATTI

Les espaces d'opérateurs de dimensions infinies étudiés à l'aide des géométries non commutatives servent à élaborer de nouvelles théories en physique.



Les espaces qui nous sont le plus familiers, ceux qui correspondent à notre expérience quotidienne, sont les espaces euclidiens. Au III^e siècle avant notre ère, Euclide définit les notions de point, de droite, de distance et d'angle. Il énonce les «règles», ou postulats, auxquels les objets présents dans ces espaces obéissent. Cette géométrie correspond si bien à notre monde que, pendant plus de 2 000 ans, personne ne pense à la remettre en cause.

Cependant, à partir du XVIII^e siècle, des mathématiciens tels que Hugo Riemann ou Nikolai Lobatchevski s'aperçoivent qu'ils peuvent faire de la géométrie dans des espaces où l'un au moins des postulats d'Euclide n'est plus vrai. Par exemple, Lobatchevski propose de considérer des espaces où, par un point donné, passe une infinité de droites parallèles à une droite donnée (dans les espace euclidiens, il n'y en a qu'une) : il fonde ainsi une «extension» de la géométrie euclidienne, nommée géométrie hyperbolique.

Certaines extensions de la géométrie euclidienne, reposant sur des postulats qui semblent au départ arbitraires, trouvent des applications utiles en physique. Par exemple, Hermann Minkowski (qui fut le professeur d'Albert Einstein) ajoute une dimension supplémentaire aux espaces euclidiens, le temps. Ce nouveau concept, appelé espace-temps, est à la base de la relativité restreinte, dont les applications pratiques sont

nombreuses, notamment en électromagnétisme et en astronomie.

Pour élaborer la théorie de la relativité générale, Einstein utilise une autre de ces extensions : il considère la gravitation, force universelle qui s'applique sur toute chose. Le seul moyen de s'y soustraire est d'y opposer une force d'inertie. Cette dernière se manifeste soit lors des accélérations et des décélérations sur les trajectoires rectilignes, mais qui apparaissent courbées dans l'espace-temps (sur une fusée qui décolle, la force de gravitation est compensée par l'accélération), soit lors d'un mouvement sur une trajectoire courbe (la rotation des stations spatiales sur elles-mêmes crée une force d'inertie, qui joue le rôle de force de gravitation).

La courbure de l'espace-temps

Einstein a ainsi l'idée de modéliser la gravitation comme une courbure de l'espace. Grâce à cette théorie, il prévoit des effets qui n'existent pas dans les espaces euclidiens, mais que l'on observe dans notre monde. Par exemple, un rayon lumineux passant à proximité du Soleil est dévié par la force de gravitation, tandis que, dans un espace euclidien, il se propage en ligne droite. La force de gravitation induit ainsi une courbure de l'espace (voir la figure 1). On le vérifie lors des éclipses de Soleil : les étoiles dont les coordonnées sont connues et dont les rayons passent près du Soleil

(celles qui sont à quelques minutes d'angle du Soleil) semblent légèrement décalées, par rapport à la position qu'elles devraient occuper. Cette observation montre que la lumière est effectivement déviée par le champ de gravitation du Soleil.

Puis les physiciens s'intéressent à la matière aux échelles microscopiques et élaborent la théorie de la mécanique quantique. Dans les espaces euclidiens, il y a une infinité de points sur la droite qui relie deux points donnés, si proches soient ils l'un de l'autre. Ce concept a-t-il un sens en physique? Pour le savoir, les physiciens essaient de mesurer les positions des particules, indivisibles, qui sont l'équivalent des points dans les espaces euclidiens. Pour mesurer les dimensions d'une pièce, on la compare aux objets qu'elle contient, par exemple à un mètre. Plus la dimension que l'on veut mesurer est grande par rapport à l'objet qui sert de référence, plus la précision est grande (en admettant que l'objet de référence soit indivisible). Ainsi, pour mesurer la position d'une particule, on utilise l'objet de référence le plus petit possible, soit une autre particule. La précision est médiocre. En outre, la mesure, c'est-à-dire l'impact de la particule ou du faisceau de particules censé mesurer la position de la particule à laquelle on s'intéresse, modifie les coordonnées de cette dernière. Ainsi, connaître exactement la position et la vitesse d'une particule est impossible. Cette propriété a été énoncée par Werner Heisenberg.

Des coordonnées non commutatives

La mécanique quantique, notamment la théorie quantique des champs, qui inclut les interactions quantiques et relativistes, ne tient pas compte de la gravitation. Aujourd'hui, on essaie d'élaborer des théories où la gravitation devrait obéir aux lois de la mécanique quantique. Dans ces théories, le principe de Heisenberg s'applique à la gravitation : la courbure de l'espace ne peut pas être complètement déterminée. Dès lors que l'on mesure l'une des coordonnées, on modifie cette courbure, donc les autres coordonnées. Ainsi, si l'on mesure les coordonnées d'un objet dans un certain ordre, par exemple x , y puis z , et qu'ensuite on les mesure dans un ordre différent, par exemple z , x , puis y , on n'obtient pas le même résultat : la mesure des coordonnées ne commute pas. Pour décrire cet état de fait, on utilise les géométries non commutatives.

Les espaces non commutatifs sont construits en découpant un espace de départ en régions, ou classes d'équiva-

lence (dont les points ont une propriété en commun) et en identifiant chacune d'elles à un point du nouvel espace (voir la figure 2). L'opération qui transforme une classe d'équivalence en un point du nouvel espace est dite opération de passage au quotient. Considérons notre monde comme le quotient d'un espace de départ (que l'on peut choisir parmi une multitude d'espaces distincts) : le flou existant sur les coordonnées en physique quantique (correspondant aux différents états possibles d'un système à un instant donné) laisse supposer que l'espace de départ a plus de dimensions que celles que nous connaissons. Par exemple, il pourrait avoir sept dimensions spatiales et trois dimensions temporelles.

En mathématique, on utilise couramment des fonctions, qui assignent à chaque point un nombre, par exemple l'une de ses coordonnées. De même, en physique, la fonction température associe à chaque point de l'atmosphère un nombre qui exprime, en degrés, la température en ce point. La fonction que l'on peut nommer « fonction inter-

action » associe à chaque point un vecteur force à trois composantes, auquel serait soumise une particule supposée ponctuelle placée en ce point. Par définition, les fonctions à valeurs numériques sont commutatives : l'attribution d'un nombre ou d'un vecteur à chaque point est indépendante des autres attributions effectuées. On ne peut donc pas décrire notre monde (en englobant la mécanique quantique et la gravitation, c'est-à-dire en considérant qu'il est non commutatif, comme nous l'avons vu précédemment sur les coordonnées d'une particule) avec des fonctions commutatives.

Puisque l'on ne peut pas utiliser de fonction, on se sert d'opérateurs, bien adaptés, car ils ne commutent pas. Un opérateur est une procédure qui associe à chaque point ou entité de l'espace de départ une autre entité appartenant à l'espace d'arrivée (éventuellement, le même que l'espace de départ). Une rotation de 30 degrés du plan cartésien est un exemple d'opérateur d'un espace dans lui-même. Si un espace est invariant par rotation autour d'un point, on



NASA, W. Colley et E. Turner, Princeton University ; J. Tyson, Bell Laboratories

1. CINQ IMAGES d'une même galaxie (indiquées par les flèches rouges) sont visibles sur cette photographie prise par le Télescope spatial *Hubble*. Cette observation illustre la courbure de l'espace-temps prévue par Einstein dans sa théorie de la relativité générale : les rayons lumineux sont déviés par les amas de galaxies (tel celui qui apparaît en jaune, au centre). Si l'on intègre cette propriété à la mécanique quantique, alors l'ordre dans lequel on mesure les coordonnées d'une particule n'est plus indifférent : la

mesure de chaque coordonnée modifie la courbure de l'espace-temps, donc la valeur des autres coordonnées. Pour modéliser ce phénomène, on a élaboré des géométries non commutatives. Pour choisir celle qui correspond le mieux à notre monde, on confronte les prévisions de chacune d'elles à nos observations. De même qu'Einstein a prévu la courbure de l'espace-temps avant de l'avoir observée, les géométries non commutatives révéleront peut-être des phénomènes insoupçonnés.