

## Des coordonnées non commutatives

La mécanique quantique, notamment la théorie quantique des champs, qui inclut les interactions quantiques et relativistes, ne tient pas compte de la gravitation. Aujourd'hui, on essaie d'élaborer des théories où la gravitation devrait obéir aux lois de la mécanique quantique. Dans ces théories, le principe de Heisenberg s'applique à la gravitation : la courbure de l'espace ne peut pas être complètement déterminée. Dès lors que l'on mesure l'une des coordonnées, on modifie cette courbure, donc les autres coordonnées. Ainsi, si l'on mesure les coordonnées d'un objet dans un certain ordre, par exemple  $x$ ,  $y$  puis  $z$ , et qu'ensuite on les mesure dans un ordre différent, par exemple  $z$ ,  $x$ , puis  $y$ , on n'obtient pas le même résultat : la mesure des coordonnées ne commute pas. Pour décrire cet état de fait, on utilise les géométries non commutatives.

Les espaces non commutatifs sont construits en découpant un espace de départ en régions, ou classes d'équiva-

lence (dont les points ont une propriété en commun) et en identifiant chacune d'elles à un point du nouvel espace (voir la figure 2). L'opération qui transforme une classe d'équivalence en un point du nouvel espace est dite opération de passage au quotient. Considérons notre monde comme le quotient d'un espace de départ (que l'on peut choisir parmi une multitude d'espaces distincts) : le flou existant sur les coordonnées en physique quantique (correspondant aux différents états possibles d'un système à un instant donné) laisse supposer que l'espace de départ a plus de dimensions que celles que nous connaissons. Par exemple, il pourrait avoir sept dimensions spatiales et trois dimensions temporelles.

En mathématique, on utilise couramment des fonctions, qui assignent à chaque point un nombre, par exemple l'une de ses coordonnées. De même, en physique, la fonction température associe à chaque point de l'atmosphère un nombre qui exprime, en degrés, la température en ce point. La fonction que l'on peut nommer « fonction inter-

action » associe à chaque point un vecteur force à trois composantes, auquel serait soumise une particule supposée ponctuelle placée en ce point. Par définition, les fonctions à valeurs numériques sont commutatives : l'attribution d'un nombre ou d'un vecteur à chaque point est indépendante des autres attributions effectuées. On ne peut donc pas décrire notre monde (en englobant la mécanique quantique et la gravitation, c'est-à-dire en considérant qu'il est non commutatif, comme nous l'avons vu précédemment sur les coordonnées d'une particule) avec des fonctions commutatives.

Puisque l'on ne peut pas utiliser de fonction, on se sert d'opérateurs, bien adaptés, car ils ne commutent pas. Un opérateur est une procédure qui associe à chaque point ou entité de l'espace de départ une autre entité appartenant à l'espace d'arrivée (éventuellement, le même que l'espace de départ). Une rotation de 30 degrés du plan cartésien est un exemple d'opérateur d'un espace dans lui-même. Si un espace est invariant par rotation autour d'un point, on



1. CINQ IMAGES d'une même galaxie (indiquées par les flèches rouges) sont visibles sur cette photographie prise par le Télescope spatial Hubble. Cette observation illustre la courbure de l'espace-temps prévue par Einstein dans sa théorie de la relativité générale : les rayons lumineux sont déviés par les amas de galaxies (tel celui qui apparaît en jaune, au centre). Si l'on intègre cette propriété à la mécanique quantique, alors l'ordre dans lequel on mesure les coordonnées d'une particule n'est plus indifférent : la

mesure de chaque coordonnée modifie la courbure de l'espace-temps, donc la valeur des autres coordonnées. Pour modéliser ce phénomène, on a élaboré des géométries non commutatives. Pour choisir celle qui correspond le mieux à notre monde, on confronte les prévisions de chacune d'elles à nos observations. De même qu'Einstein a prévu la courbure de l'espace-temps avant de l'avoir observée, les géométries non commutatives révéleront peut-être des phénomènes insoupçonnés.

exprime ses propriétés de symétrie en affirmant simplement que l'opérateur de rotation transforme l'espace en lui-même. L'intérêt de l'approche opérationnelle réside dans son caractère synthétique.

Même dans un espace euclidien, une telle approche se justifie, car elle évite de considérer les points un à un et permet pourtant de retrouver les mêmes informations que par une approche classique. Prenons l'exemple d'une biopsie : elle consiste à prélever un échantillon en chaque point ou chaque endroit sur lequel on veut obtenir une information. Avec une radiographie, au contraire, on obtient une « synthèse » des données que l'on aurait récoltées en accumulant les biopsies, mais certaines informations sont perdues (la radiographie donne une information ou un niveau de gris pour un segment entier de points alignés dans la direction des rayons X, tandis que les biopsies donnent une information en chaque point). En mathématique, une radiographie peut être considérée comme un opérateur, défini sur le volume étudié (la par-

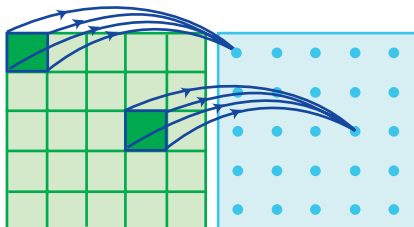
tie du corps radiographié) qui constitue l'espace de départ. L'espace d'arrivée est la plaque photographique. L'opérateur radiographie associe à chaque ensemble de points alignés dans la direction des rayons X, un point de la plaque photographique dont la nuance de gris est définie comme l'intégrale de l'intensité du rayon X qui a traversé le volume étudié (voir la figure 3). Dans ce cas, tous les points alignés dans la direction des rayons X sont « écrasés » en un seul point de la plaque photographique.

## Des espaces d'opérateurs de dimension infinie

La mécanique quantique interdit toute description du monde en termes de fonctions et exige d'avoir recours à des opérateurs. Aujourd'hui, pour élaborer de nouvelles théories, les physiciens envisagent notre monde comme le quotient d'un espace de départ, à imaginer. Ils construisent des géométries non commutatives pour étudier des espaces d'opérateurs qui feraient

passer des espaces de départ possibles à notre monde. Ils ont déjà démontré que la partie non commutative de cet espace de départ (qui coexiste avec une partie commutative correspondant aux phénomènes ordinaires que nous connaissons) ne peut pas être décrite avec un espace d'opérateur de dimension finie. Cette restriction est imposée par la théorie de la relativité restreinte. Cependant, ils n'ont que quelques indices sur l'espace de départ et procèdent un peu au hasard pour en choisir un parmi tous les espaces possibles, c'est-à-dire pour choisir la « jauge » : si l'on considère l'opération de passage au quotient comme une projection, pendant laquelle certaines informations présentes dans l'espace de départ sont perdues, la jauge serait l'antiprojection qui ferait passer de notre monde à l'espace de départ.

Comment accéder aux informations perdues, alors que l'on ne connaît même pas leur nature ? Les physiciens sont un peu dans la même situation que quelqu'un qui regarde les photographies d'une maison (une représentation à deux



**2. DANS LES NOUVELLES THÉORIES DE PHYSIQUE**, notre monde est considéré comme une projection d'un espace de départ sur un espace d'arrivée. De même, une pipe (à trois dimensions) est représentée par une projection sur un plan (la représentation est à deux dimensions ; ci-dessous, *La trahison des images*, de Magritte, 1929). Les géométries non commutatives étudient l'opération dite de passage au quotient, qui transformeraient un espace de départ (*ci-contre en vert*) en notre monde physique (*en bleu*). Chaque classe d'équivalence (où les points ont une propriété commune et schématisée ici par un carré vert) est identifiée à un point de notre monde, où les propriétés de l'espace de départ sont « agglutinées » en un point.

