

exprime ses propriétés de symétrie en affirmant simplement que l'opérateur de rotation transforme l'espace en lui-même. L'intérêt de l'approche opérationnelle réside dans son caractère synthétique.

Même dans un espace euclidien, une telle approche se justifie, car elle évite de considérer les points un à un et permet pourtant de retrouver les mêmes informations que par une approche classique. Prenons l'exemple d'une biopsie : elle consiste à prélever un échantillon en chaque point ou chaque endroit sur lequel on veut obtenir une information. Avec une radiographie, au contraire, on obtient une « synthèse » des données que l'on aurait récoltées en accumulant les biopsies, mais certaines informations sont perdues (la radiographie donne une information ou un niveau de gris pour un segment entier de points alignés dans la direction des rayons X, tandis que les biopsies donnent une information en chaque point). En mathématique, une radiographie peut être considérée comme un opérateur, défini sur le volume étudié (la par-

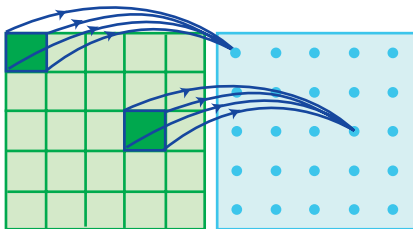
tie du corps radiographié) qui constitue l'espace de départ. L'espace d'arrivée est la plaque photographique. L'opérateur radiographie associe à chaque ensemble de points alignés dans la direction des rayons X, un point de la plaque photographique dont la nuance de gris est définie comme l'intégrale de l'intensité du rayon X qui a traversé le volume étudié (voir la figure 3). Dans ce cas, tous les points alignés dans la direction des rayons X sont « écrasés » en un seul point de la plaque photographique.

Des espaces d'opérateurs de dimension infinie

La mécanique quantique interdit toute description du monde en termes de fonctions et exige d'avoir recours à des opérateurs. Aujourd'hui, pour élaborer de nouvelles théories, les physiciens envisagent notre monde comme le quotient d'un espace de départ, à imaginer. Ils construisent des géométries non commutatives pour étudier des espaces d'opérateurs qui feraient

passer des espaces de départ possibles à notre monde. Ils ont déjà démontré que la partie non commutative de cet espace de départ (qui coexiste avec une partie commutative correspondant aux phénomènes ordinaires que nous connaissons) ne peut pas être décrite avec un espace d'opérateur de dimension finie. Cette restriction est imposée par la théorie de la relativité restreinte. Cependant, ils n'ont que quelques indices sur l'espace de départ et procèdent un peu au hasard pour en choisir un parmi tous les espaces possibles, c'est-à-dire pour choisir la « jauge » : si l'on considère l'opération de passage au quotient comme une projection, pendant laquelle certaines informations présentes dans l'espace de départ sont perdues, la jauge serait l'antiprojection qui ferait passer de notre monde à l'espace de départ.

Comment accéder aux informations perdues, alors que l'on ne connaît même pas leur nature ? Les physiciens sont un peu dans la même situation que quelqu'un qui regarde les photographies d'une maison (une représentation à deux



2. DANS LES NOUVELLES THÉORIES DE PHYSIQUE, notre monde est considéré comme une projection d'un espace de départ sur un espace d'arrivée. De même, une pipe (à trois dimensions) est représentée par une projection sur un plan (la représentation est à deux dimensions ; ci-dessous, *La trahison des images*, de Magritte, 1929). Les géométries non commutatives étudient l'opération dite de passage au quotient, qui transformeraient un espace de départ (*ci-contre en vert*) en notre monde physique (*en bleu*). Chaque classe d'équivalence (où les points ont une propriété commune et schématisée ici par un carré vert) est identifiée à un point de notre monde, où les propriétés de l'espace de départ sont « agglutinées » en un point.





3. L'«OPÉRATEUR RADIOGRAPHIE» associe à chaque ensemble de points alignés dans la direction des rayons X qui traversent l'espace de départ (le volume du corps, à gauche), un point de la plaque photographique (à droite) ; la nuance de gris est définie comme l'intégrale de l'intensité du rayon X qui a traversé l'espace de départ. Les géométries non commutatives étudient les opérateurs qui font passer d'un espace de départ à notre monde. Lors de la transformation d'un espace de départ vers un espace d'arrivée, des informations sont perdues, de même qu'une partie de l'information sur les organes est perdue lorsque l'on effectue une radiographie : non seulement on ne visualise que les os, mais on passe de structures tridimensionnelles à une photographie bidimensionnelle.

dimensions) sans savoir à quoi ressemble effectivement une maison (c'est-à-dire sans savoir qu'elle existe dans un espace à trois dimensions). Pour décrire la maison, on pourrait croire qu'il faut accumuler le plus de photographies possible, car elles sont toutes différentes. En revanche, si l'on sait que la maison est un objet à trois dimensions, on se rend compte que trois photographies, prises dans les trois directions de l'espace, suffisent pour la décrire.

Les physiciens considèrent que la façon dont ils décrivent le monde avec la théorie quantique des champs est redondante, de même que la description de la maison avec un grand nombre de photographies. En quoi est-elle redondante? Ils ne le sauront que lorsqu'ils auront fait un choix de jauge qui donnera un espace quotient dont les propriétés prédiront des phénomènes existant dans notre Univers, de même que la théorie d'Einstein prédisait la déviation des rayons lumineux par la force de gravitation, hypothèse confirmée ultérieurement.

Les choix de jauges

Pour l'instant, cette approche est une impasse. Les choix de jauge ont abouti à deux types de situations. Dans le premier, les descriptions des espaces de départ envisagés reproduisent les descriptions classiques de notre monde (notamment des interactions électromagnétiques), à quelques variantes près, mais ne prédisent que des phénomènes déjà connus. Ce résultat est aussi peu

surprenant que l'habileté d'un joueur de fléchettes qui vise toujours dans le mille, si ce joueur dessine la cible autour de la fléchette après l'avoir lancée. Dans le deuxième type de situation, les physiciens ont décrit l'espace de départ, dont notre monde serait le quotient, en s'affranchissant de certaines contraintes qui y existent. Leurs théories prédisent alors une foule de phénomènes qui n'existent pas dans notre monde.

Ils devront affiner le choix des contraintes à abandonner, mais ne pourront pas le faire à l'aide des seules géométries non commutatives. Les accélérateurs leur donneront peut-être des indices : à mesure que les énergies employées augmentent, elles révéleront probablement des phénomènes insoupçonnés. Ces phénomènes désigneront alors la géométrie non commutative qui les prévoit comme celle qui fera progresser la physique.

Daniela BIGATTI est mathématicienne à l'Institut Weizmann, en Israël. Elle a récemment travaillé à l'Université catholique de Louvain sur les géométries non commutatives et leurs applications à la théorie des cordes.

Daniela BIGATTI, *Noncommutative spaces in physics and mathematics*, in *Class. Quant. Grav.*, n° 17, pp. 3403-3428, 2000.

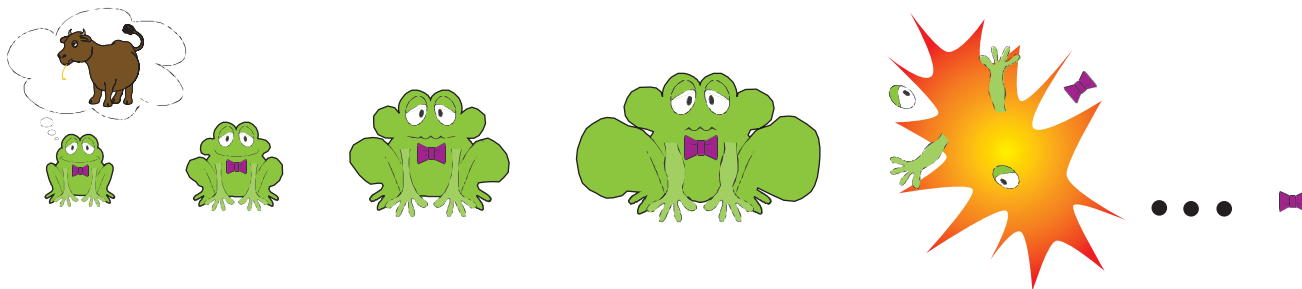
A. CONNES, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1995.

A. CONNES, *Geometrie non commutative*, InterÉditions, Paris, 1990.

L'infini est-il nécessaire?

PATRICK DEHORNOY

Oui. Les suites de Goodstein gonflent et grossissent jusqu'à des tailles gigantesques... Et diminuent finalement pour atteindre zéro. Pour démontrer cette propriété paradoxale, il est inévitable de faire appel à l'infini.



Les nombres entiers sont des objets finis : on pourrait donc espérer que toutes leurs propriétés se démontrent sans recourir à l'infini. Erreur : seul l'infini permet de démontrer le théorème de Goodstein, qui s'applique aux suites inventées par le logicien anglais Reuben Louis Goodstein et dont les éléments sont pourtant des nombres entiers.

Pour comprendre ce paradoxe, voyons comment construire les suites de Goodstein et définissons pour cela le développement d'un entier en base p , puis en base p itérée.

On écrit habituellement les nombres entiers dans le système décimal, où l'on décompose un entier en une somme de puissances de 10, multipliées par des entiers compris entre 0 et 9. Ainsi l'entier noté 266 en base 10 correspond à la décomposition : $266 = 10^2 \times 2 + 10^1 \times 6 + 10^0 \times 6$, (par définition, a^1 est a et a^0 est 1). D'autres bases sont aussi employées. Les Babyloniens utilisaient la base 60, pratique grâce à ses nombreux diviseurs. Les ordinateurs effectuent les calculs en base 2. L'entier qui s'écrit 266 en base 10, se décompose en puissances de 2 : $266 = 256 + 8 + 2$, soit $2^8 + 2^3 + 2^1$.

En faisant figurer toutes les puissances de 2 : $2^8 \times 1 + 2^7 \times 0 + 2^6 \times 0 + 2^5 \times 0 + 2^4 \times 0 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 +$

$2^1 \times 1 + 2^0 \times 0$. D'où l'écriture de 266 en base 2 : 100001010.

Le développement en base p itérée est de même nature. Dans ce cas, on écrit aussi les exposants en base p , puis les exposants d'exposants, etc. Par exemple, le développement de 266 en base 2 est $2^8 + 2^3 + 2^1$; pour obtenir son développement en base 2 itérée, commençons par écrire les exposants en base 2 : $2^{2^3} + 2^{2^1+1} + 2^1$, puis l'entier 3, exposant d'exposant, est à son tour exprimé en base 2 : $266 = 2^{2^{2^1+1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$. Cette expression est le développement en base 2 itérée de 266. Pour tout entier p plus grand que 2, le développement en base p itérée est construit de même : c'est une expression où apparaissent l'addition, la multiplication par des entiers plus petits que p et l'opération « p puissance».

La dilatation des entiers

Pour construire maintenant les suites de Goodstein, nous définissons une opération, appelée dilatation, et désignée par d_p (p étant un entier au moins égal à 2), qui s'effectue, à partir d'un entier n quelconque, en deux étapes : on écrit n en base p itérée, puis on remplace partout p par $p+1$, (par exemple, 2^2 est remplacé par 3^3). Dilatons l'entier 266. Il s'écrit en base 2 : $2^{2^{2^1+1}} + 2^{2^1+1} + 2$, (nous avons omis les exposants 1), le dilaté $d_2(266)$ s'obtient en remplaçant les 2 par des 3, soit : $d_2(266) = 3^{3^{3^1+1}} + 3^{3^1+1} + 3 = 3^{81} + 84$,

dont l'écriture en base 10 a 38 chiffres. Remplacer « p puissance» par « $p+1$ puissance» engendre un nombre plus grand, voire beaucoup plus grand, que l'entier initial.

Forts de ces outils, nous définissons maintenant les suites de Goodstein $g_p(n)$. Une telle suite $g_1(n)$, $g_2(n)$, etc., se construit à partir d'un entier quelconque n , que nous appellerons la «graine». La règle est la suivante : nous posons $g_1(n) = n$, puis nous calculons $g_2(n)$ en dilatant $g_1(n)$ à l'aide de l'opération d_2 et en retranchant 1 du résultat, et ainsi de suite en utilisant la relation de récurrence $g_p(n) = d_p(g_{p-1}(n)) - 1$.

Par exemple, pour la graine $n = 266$, nous trouvons $g_1(266) = 266$, puis $g_2(266) = d_2(266) - 1 = d_2(2^{2^{2^1+1}} + 2^{2^1+1} + 2) - 1 = (3^{3^{3^1+1}} + 3^{3^1+1} + 3) - 1$. Ce nombre a , nous l'avons vu, 38 chiffres en base 10.

Le terme suivant $g_3(266)$ est égal à $d_3(g_2(266)) - 1$, soit $d_3(3^{3^{3^1+1}} + 3^{3^1+1} + 2) - 1 = 4^{4^{4^1+1}} + 4^{4^1+1} + 1$, un nombre de 616 chiffres en base 10.

Pourquoi retrancher 1 à chaque fois ? Les dilatations fabriquent des nombres tellement grands que le facteur -1 ne semble pas *a priori* influencer beaucoup sur le résultat ! Pourtant, c'est lui qui joue un rôle majeur dans les suites de Goodstein et engendre des phénomènes étranges.

Reprenons la suite de Goodstein de graine 266. Nous avons calculé $g_3(266) = 4^{4^{4^1+1}} + 4^{4^1+1} + 1$. Poursuivons : $g_4(266) = d_4(g_3(266)) - 1 = d_4(4^{4^{4^1+1}} + 4^{4^1+1} + 1) - 1 = 5^{5^{5^1+1}} + 5^{5^1+1} + 1$,

