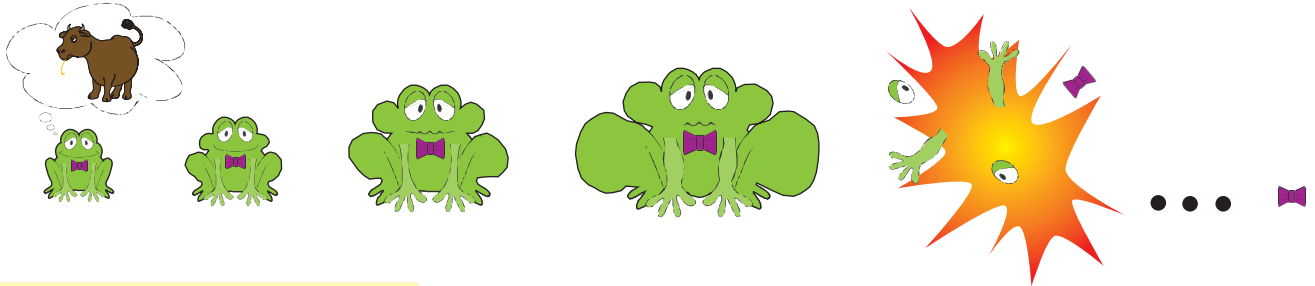


L'infini est-il nécessaire?

PATRICK DEHORNOY

Oui. Les suites de Goodstein gonflent et grossissent jusqu'à des tailles gigantesques... Et diminuent finalement pour atteindre zéro. Pour démontrer cette propriété paradoxale, il est inévitable de faire appel à l'infini.



Les nombres entiers sont des objets finis : on pourrait donc espérer que toutes leurs propriétés se démontrent sans recourir à l'infini. Erreur : seul l'infini permet de démontrer le théorème de Goodstein, qui s'applique aux suites inventées par le logicien anglais Reuben Louis Goodstein et dont les éléments sont pourtant des nombres entiers.

Pour comprendre ce paradoxe, voyons comment construire les suites de Goodstein et définissons pour cela le développement d'un entier en base p , puis en base p itérée.

On écrit habituellement les nombres entiers dans le système décimal, où l'on décompose un entier en une somme de puissances de 10, multipliées par des entiers compris entre 0 et 9. Ainsi l'entier noté 266 en base 10 correspond à la décomposition : $266 = 10^2 \times 2 + 10^1 \times 6 + 10^0 \times 6$, (par définition, a^1 est a et a^0 est 1). D'autres bases sont aussi employées. Les Babyloniens utilisaient la base 60, pratique grâce à ses nombreux diviseurs. Les ordinateurs effectuent les calculs en base 2. L'entier qui s'écrit 266 en base 10, se décompose en puissances de 2 : $266 = 256 + 8 + 2$, soit $2^8 + 2^3 + 2^1$.

En faisant figurer toutes les puissances de 2 : $2^8 \times 1 + 2^7 \times 0 + 2^6 \times 0 + 2^5 \times 0 + 2^4 \times 0 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 +$

$2^1 \times 1 + 2^0 \times 0$. D'où l'écriture de 266 en base 2 : 100001010.

Le développement en base p itérée est de même nature. Dans ce cas, on écrit aussi les exposants en base p , puis les exposants d'exposants, etc. Par exemple, le développement de 266 en base 2 est $2^8 + 2^3 + 2^1$; pour obtenir son développement en base 2 itérée, commençons par écrire les exposants en base 2 : $2^{2^3} + 2^{2^1+1} + 2^1$, puis l'entier 3, exposant d'exposant, est à son tour exprimé en base 2 : $266 = 2^{2^{2^1+1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$. Cette expression est le développement en base 2 itérée de 266. Pour tout entier p plus grand que 2, le développement en base p itérée est construit de même : c'est une expression où apparaissent l'addition, la multiplication par des entiers plus petits que p et l'opération « p puissance».

La dilatation des entiers

Pour construire maintenant les suites de Goodstein, nous définissons une opération, appelée dilatation, et désignée par d_p (p étant un entier au moins égal à 2), qui s'effectue, à partir d'un entier n quelconque, en deux étapes : on écrit n en base p itérée, puis on remplace partout p par $p+1$, (par exemple, 2^2 est remplacé par 3^3). Dilatons l'entier 266. Il s'écrit en base 2 : $2^{2^{2^1+1}} + 2^{2^1+1} + 2$, (nous avons omis les exposants 1), le dilaté $d_2(266)$ s'obtient en remplaçant les 2 par des 3, soit : $d_2(266) = 3^{3^{3^1+1}} + 3^{3^1+1} + 3 = 3^{81} + 84$,

dont l'écriture en base 10 a 38 chiffres. Remplacer « p puissance» par « $p+1$ puissance» engendre un nombre plus grand, voire beaucoup plus grand, que l'entier initial.

Forts de ces outils, nous définissons maintenant les suites de Goodstein $g_p(n)$. Une telle suite $g_1(n)$, $g_2(n)$, etc., se construit à partir d'un entier quelconque n , que nous appellerons la «graine». La règle est la suivante : nous posons $g_1(n) = n$, puis nous calculons $g_2(n)$ en dilatant $g_1(n)$ à l'aide de l'opération d_2 et en retranchant 1 du résultat, et ainsi de suite en utilisant la relation de récurrence $g_p(n) = d_p(g_{p-1}(n)) - 1$.

Par exemple, pour la graine $n = 266$, nous trouvons $g_1(266) = 266$, puis $g_2(266) = d_2(266) - 1 = d_2(2^{2^{2^1+1}} + 2^{2^1+1} + 2) - 1 = (3^{3^{3^1+1}} + 3^{3^1+1} + 3) - 1$. Ce nombre a , nous l'avons vu, 38 chiffres en base 10.

Le terme suivant $g_3(266)$ est égal à $d_3(g_2(266)) - 1$, soit $d_3(3^{3^{3^1+1}} + 3^{3^1+1} + 2) - 1 = 4^{4^{4^1+1}} + 4^{4^1+1} + 1$, un nombre de 616 chiffres en base 10.

Pourquoi retrancher 1 à chaque fois ? Les dilatations fabriquent des nombres tellement grands que le facteur -1 ne semble pas *a priori* influencer beaucoup sur le résultat ! Pourtant, c'est lui qui joue un rôle majeur dans les suites de Goodstein et engendre des phénomènes étranges.

Reprenons la suite de Goodstein de graine 266. Nous avons calculé $g_3(266) = 4^{4^{4^1+1}} + 4^{4^1+1} + 1$. Poursuivons : $g_4(266) = d_4(g_3(266)) - 1 = d_4(4^{4^{4^1+1}} + 4^{4^1+1} + 1) - 1 = 5^{5^{5^1+1}} + 5^{5^1+1} + 1$,

