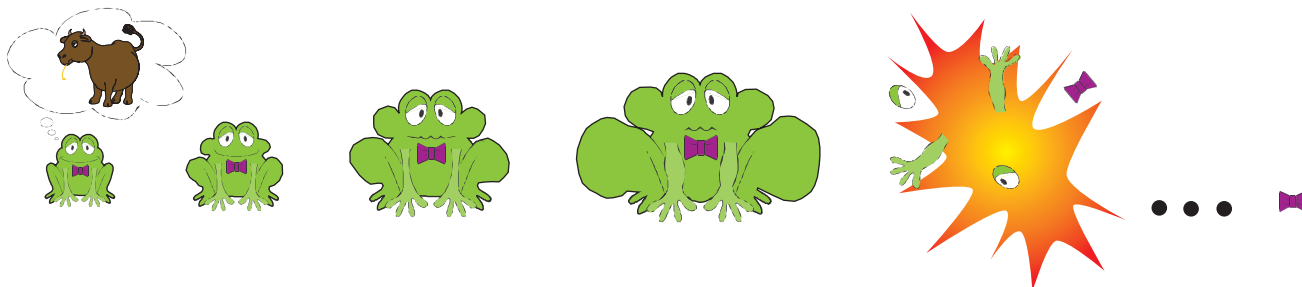


L'infini est-il nécessaire?

PATRICK DEHORNOY

Oui. Les suites de Goodstein gonflent et grossissent jusqu'à des tailles gigantesques... Et diminuent finalement pour atteindre zéro. Pour démontrer cette propriété paradoxale, il est inévitable de faire appel à l'infini.



Les nombres entiers sont des objets finis : on pourrait donc espérer que toutes leurs propriétés se démontrent sans recourir à l'infini. Erreur : seul l'infini permet de démontrer le théorème de Goodstein, qui s'applique aux suites inventées par le logicien anglais Reuben Louis Goodstein et dont les éléments sont pourtant des nombres entiers.

Pour comprendre ce paradoxe, voyons comment construire les suites de Goodstein et définissons pour cela le développement d'un entier en base p , puis en base p itérée.

On écrit habituellement les nombres entiers dans le système décimal, où l'on décompose un entier en une somme de puissances de 10, multipliées par des entiers compris entre 0 et 9. Ainsi l'entier noté 266 en base 10 correspond à la décomposition : $266 = 10^2 \times 2 + 10^1 \times 6 + 10^0 \times 6$, (par définition, a^1 est a et a^0 est 1). D'autres bases sont aussi employées. Les Babyloniens utilisaient la base 60, pratique grâce à ses nombreux divi-

seurs. Les ordinateurs effectuent les calculs en base 2. L'entier qui s'écrit 266 en base 10, se décompose en puissances de 2 : $266 = 256 + 8 + 2$, soit $2^8 + 2^3 + 2^1$.

En faisant figurer toutes les puissances de 2 : $2^8 \times 1 + 2^7 \times 0 + 2^6 \times 0 + 2^5 \times 0 + 2^4 \times 0 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 +$

$2^1 \times 1 + 2^0 \times 0$. D'où l'écriture de 266 en base 2 : 100001010.

Le développement en base p itérée est de même nature. Dans ce cas, on écrit aussi les exposants en base p , puis les exposants d'exposants, etc. Par exemple, le développement de 266 en base 2 est $2^8 + 2^3 + 2^1$; pour obtenir son développement en base 2 itérée, commençons par écrire les exposants en base 2 : $2^{2^3} + 2^{2^1+1} + 2^1$, puis l'entier 3, exposant d'exposant, est à son tour exprimé en base 2 : $266 = 2^{2^{2^1+1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$. Cette expression est le développement en base 2 itérée de 266. Pour tout entier p plus grand que 2, le développement en base p itérée est construit de même : c'est une expression où apparaissent l'addition, la multiplication par des entiers plus petits que p et l'opération « p puissance».

La dilatation des entiers

Pour construire maintenant les suites de Goodstein, nous définissons une opération, appelée dilatation, et désignée par d_p (p étant un entier au moins égal à 2), qui s'effectue, à partir d'un entier n quelconque, en deux étapes : on écrit n en base p itérée, puis on remplace partout p par $p+1$, (par exemple, 2^2 est remplacé par 3^3). Dilatons l'entier 266. Il s'écrit en base 2 : $2^{2^{2^1+1}} + 2^{2^1+1} + 2$, (nous avons omis les exposants 1), le dilaté $d_2(266)$ s'obtient en remplaçant les 2 par des 3, soit : $d_2(266) = 3^{3^{3^1+1}} + 3^{3^1+1} + 3 = 3^{81} + 84$,

dont l'écriture en base 10 a 38 chiffres. Remplacer « p puissance» par « $p+1$ puissance» engendre un nombre plus grand, voire beaucoup plus grand, que l'entier initial.

Forts de ces outils, nous définissons maintenant les suites de Goodstein $g_p(n)$. Une telle suite $g_1(n)$, $g_2(n)$, etc., se construit à partir d'un entier quelconque n , que nous appellerons la «graine». La règle est la suivante : nous posons $g_1(n) = n$, puis nous calculons $g_2(n)$ en dilatant $g_1(n)$ à l'aide de l'opération d_2 et en retranchant 1 du résultat, et ainsi de suite en utilisant la relation de récurrence $g_p(n) = d_p(g_{p-1}(n)) - 1$. Par exemple, pour la graine $n = 266$, nous trouvons $g_1(266) = 266$, puis $g_2(266) = d_2(266) - 1 = d_2(2^{2^{2^1+1}} + 2^{2^1+1} + 2) - 1 = (3^{3^{3^1+1}} + 3^{3^1+1} + 3) - 1$. Ce nombre a , nous l'avons vu, 38 chiffres en base 10.

Le terme suivant $g_3(266)$ est égal à $d_3(g_2(266)) - 1$, soit $d_3(3^{3^{3^1+1}} + 3^{3^1+1} + 2) - 1 = 4^{4^{4^1+1}} + 4^{4^1+1} + 1$, un nombre de 616 chiffres en base 10.

Pourquoi retrancher 1 à chaque fois ? Les dilatations fabriquent des nombres tellement grands que le facteur -1 ne semble pas *a priori* influencer beaucoup sur le résultat ! Pourtant, c'est lui qui joue un rôle majeur dans les suites de Goodstein et engendre des phénomènes étranges.

Reprenons la suite de Goodstein de graine 266. Nous avons calculé $g_3(266) = 4^{4^{4^1+1}} + 4^{4^1+1} + 1$. Poursuivons : $g_4(266) = d_4(g_3(266)) - 1 = d_4(4^{4^{4^1+1}} + 4^{4^1+1} + 1) - 1 = 5^{5^{5^1+1}} + 5^{5^1+1} + 1$,



qui a, lui, environ 10 000 chiffres en base 10. Inutile d'aller plus loin : cette suite semble tendre rapidement vers l'infini, comme le ferait toute suite de Goodstein engendrée par une autre graine. Et pourtant...

Un théorème, démontré par Goodstein en 1944, affirme : «Quelle que soit la graine de départ n , la suite de Goodstein de graine n finit par atteindre la valeur 0.»

Ce phénomène pour le moins paradoxal provient bien sûr de la présence du facteur -1 . Même microscopique, il finit par ronger la croissance de la suite, au point de la faire décroître et atteindre la valeur 0 au bout d'un nombre fini d'itérations.

Difficile à croire? Nous allons pourtant démontrer ce résultat. Calculons g_p pour les premières graines. Dans le cas de la graine 2, nous trouvons $g_1(2) = 2$, puis $g_2(2) = d_2(2) - 1 = 3 - 1 = 2$, puis $g_3(2) = d_3(g_2(2)) - 1 = 1$, et $g_4(2) = 1 - 1 = 0$. Le résultat est là, mais n'est guère convaincant, car la graine est si petite qu'aucune opération «puissance» ne figure dans le développement. Le cas de 3 n'est pas plus palpitant : pour la même raison, les dilatations n'entrent

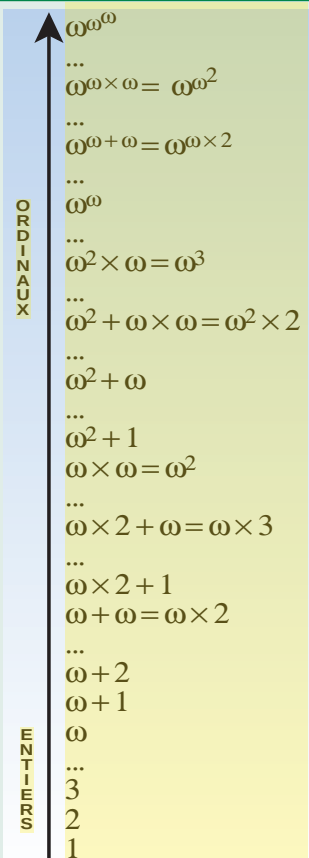
1. LES ORDINAUX

La suite des ordinaux est une continuation de la suite des entiers $0 < 1 < 2 < 3 \dots$. Elle se construit en respectant la propriété suivante : «Dans n'importe quel ensemble d'ordinaux non vide, il existe un ordinal qui est le plus petit». Cette propriété, qui est vraie pour les entiers, ne l'est pas pour les réels. Considérons, par exemple, l'ensemble des éléments «strictement compris entre 0 et 5». Le plus petit entier qui possède cette propriété est 1, mais quel est le plus petit réel? 0,0001? Non, 0,0000001 lui est inférieur, etc. Il n'existe pas de plus petit réel qui vérifie cette propriété.

Considérons maintenant l'ensemble des ordinaux infinis, c'est-à-dire ceux qui sont plus grands que tous les entiers. Dans cet ensemble, comme dans tout ensemble d'ordinaux, il existe donc un plus petit ordinal, qu'on appelle ω : on a alors $0 < 1 < 2 < 3 < \dots < \omega$.

De même, il existe un plus petit ordinal plus grand que ω , noté $\omega + 1$: $0 < 1 < 2 < 3 < \dots < \omega < \omega + 1$, suivi par $\omega + 2$, $\omega + 3$, etc., jusqu'au plus petit ordinal plus grand que tous les $\omega + n$. Ce dernier est appelé $\omega + \omega$, ou encore $\omega \times 2$.

Ensuite viennent $\omega \times 2 + 1$, $\omega \times 2 + 2$, ..., puis $\omega \times 3$, ... et $\omega \times n$; puis, après ceux-ci, $\omega \times \omega$, qu'on note aussi ω^2 . Puis ω^3 , ω^n , et, au-delà, ω^ω , et beaucoup plus loin, ω^{ω^ω} , etc. : la construction continue sans fin. Pour poursuivre, il faudrait introduire de nouvelles opérations au-delà de l'exponentiation !



2. GOODSTEIN : LA PREUVE PAR L'INFINI

La dilatation grossit la grenouille. La superdilatation, elle, transforme la grenouille en bœuf. Le bœuf G_1 , obtenu après la superdilatation D_2 , est identique à celui obtenu après la dilatation d_2 suivie de la superdilatation D_3 . On coupe un membre à la grenouille

dilatée $d_2(g_1)$: la grenouille g_2 est donc plus petite que la grenouille indemne $d_2(g_1)$. Comme les superdilatations conservent l'ordre, le bœuf G_2 est donc plus petit que le bœuf G_1 . Comme dans la fable, la grenouille a beau grossir, il n'en reste plus rien à la fin...

