

qui a, lui, environ 10 000 chiffres en base 10. Inutile d'aller plus loin : cette suite semble tendre rapidement vers l'infini, comme le ferait toute suite de Goodstein engendrée par une autre graine. Et pourtant...

Un théorème, démontré par Goodstein en 1944, affirme : «Quelle que soit la graine de départ n , la suite de Goodstein de graine n finit par atteindre la valeur 0.»

Ce phénomène pour le moins paradoxal provient bien sûr de la présence du facteur -1 . Même microscopique, il finit par ronger la croissance de la suite, au point de la faire décroître et atteindre la valeur 0 au bout d'un nombre fini d'itérations.

Difficile à croire? Nous allons pourtant démontrer ce résultat. Calculons g_p pour les premières graines. Dans le cas de la graine 2, nous trouvons $g_1(2)=2$, puis $g_2(2)=d_2(2)-1=3-1=2$, puis $g_3(2)=d_3(g_2(2))-1=1$, et $g_4(2)=1-1=0$. Le résultat est là, mais n'est guère convaincant, car la graine est si petite qu'aucune opération «puissance» ne figure dans le développement. Le cas de 3 n'est pas plus palpitant : pour la même raison, les dilatations n'entrent

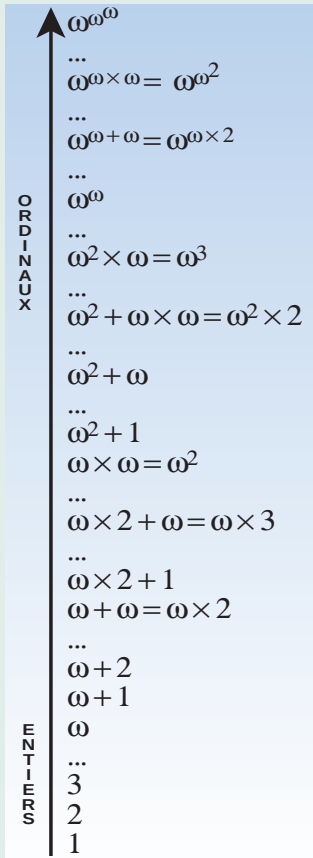
1. LES ORDINAUX

La suite des ordinaux est une continuation de la suite des entiers $0 < 1 < 2 < 3 \dots$. Elle se construit en respectant la propriété suivante : «Dans n'importe quel ensemble d'ordinaux non vide, il existe un ordinal qui est le plus petit». Cette propriété, qui est vraie pour les entiers, ne l'est pas pour les réels. Considérons, par exemple, l'ensemble des éléments «strictement compris entre 0 et 5». Le plus petit entier qui possède cette propriété est 1, mais quel est le plus petit réel? 0,0001? Non, 0,0000001 lui est inférieur, etc. Il n'existe pas de plus petit réel qui vérifie cette propriété.

Considérons maintenant l'ensemble des ordinaux infinis, c'est-à-dire ceux qui sont plus grands que tous les entiers. Dans cet ensemble, comme dans tout ensemble d'ordinaux, il existe donc un plus petit ordinal, qu'on appelle ω : on a alors $0 < 1 < 2 < 3 < \dots < \omega$.

De même, il existe un plus petit ordinal plus grand que ω , noté $\omega + 1$: $0 < 1 < 2 < 3 < \dots < \omega < \omega + 1$, suivi par $\omega + 2$, $\omega + 3$, etc., jusqu'au plus petit ordinal plus grand que tous les $\omega + n$. Ce dernier est appelé $\omega + \omega$, ou encore $\omega \times 2$.

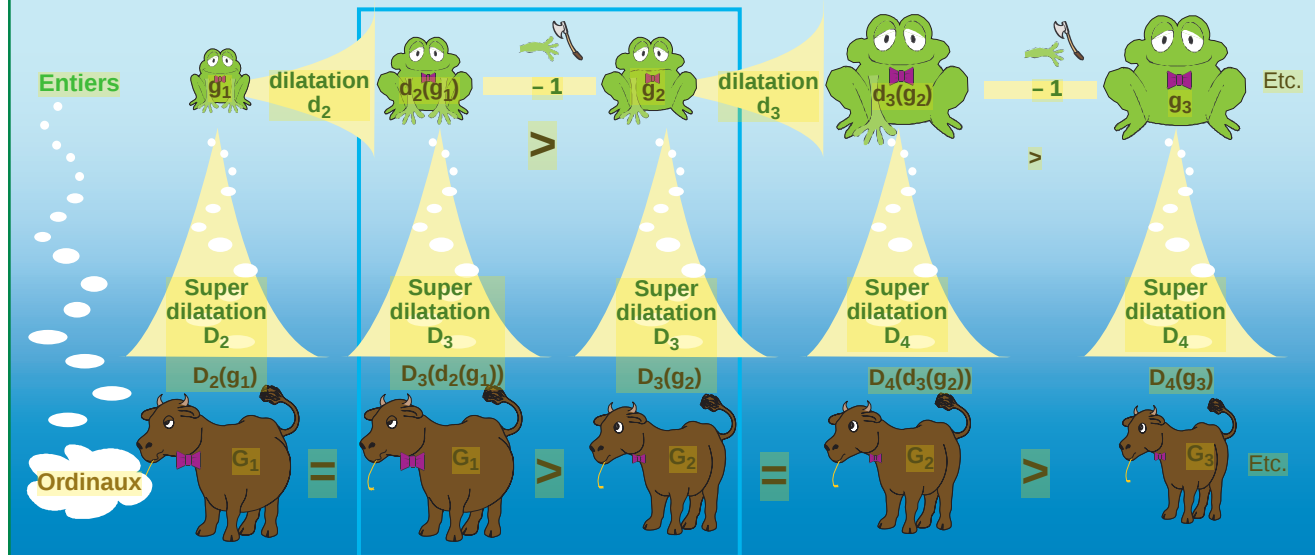
Ensuite viennent $\omega \times 2 + 1$, $\omega \times 2 + 2$, ..., puis $\omega \times 3$, ... et $\omega \times n$; puis, après ceux-ci, $\omega \times \omega$, qu'on note aussi ω^2 . Puis ω^3 , ω^n , et, au-delà, ω^ω , et beaucoup plus loin, ω^{ω^ω} , etc. : la construction continue sans fin. Pour poursuivre, il faudrait introduire de nouvelles opérations au-delà de l'exponentiation !



2. GOODSTEIN : LA PREUVE PAR L'INFINI

La dilatation grossit la grenouille. La superdilatation, elle, transforme la grenouille en bœuf. Le bœuf G_1 , obtenu après la superdilatation D_2 , est identique à celui obtenu après la dilatation d_2 suivie de la superdilatation D_3 . On coupe un membre à la grenouille

dilatée $d_2(g_1)$: la grenouille g_2 est donc plus petite que la grenouille indemne $d_2(g_1)$. Comme les superdilatations conservent l'ordre, le bœuf G_2 est donc plus petit que le bœuf G_1 . Comme dans la fable, la grenouille a beau grossir, il n'en reste plus rien à la fin...



pas vraiment en action, et nous aboutissons à $g_6(3) = 0$.

Le cas de la graine 4 gagne en revanche en intérêt... et devient plus compliqué. La suite atteint en effet la valeur 0 au bout d'un nombre d'étapes gigantesque (voir la figure 3). Dans le cas de la graine 5, et, *a fortiori*, des suivantes, les démonstrations paraissent hors de portée, car le nombre d'étapes augmente considérablement avec la valeur de la graine. Le théorème de Goodstein serait-il donc impossible à démontrer?

Non. Il existe bien une démonstration, valable pour tout n , mais elle nécessite de sortir du cadre de l'arithmétique et de recourir à une autre méthode : les ordinaux. Les ordinaux sont une prolongation de la suite des entiers, in-

troduite à la fin du siècle dernier par le mathématicien allemand Georg Cantor (voir la figure 1). Ils comprennent donc les entiers et, plus grands que tous les entiers, les ordinaux infinis, aussi appelés «transfins», c'est-à-dire «au-delà du fini». Deux points importants pour la démonstration du théorème de Goodstein : a) Les ordinaux sont munis d'une arithmétique similaire à celle des entiers (les quatre opérations de base) ; b) Toute suite décroissante d'ordinaux parvient à la valeur 0 en un nombre fini d'étapes (voir la figure 4).

Le théorème de Goodstein se démontre comme suit. Nous introduisons, pour chaque entier p , une «superdilatation» D_p définie comme d_p , à cela près qu'au lieu de remplacer p par $p+1$ dans le développement en base p itérée, p est remplacé par l'or-

dinal infini ω . Ainsi, la relation $266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$ entraîne $D_2(266) = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega$, à comparer avec $d_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3$.

Examinons une propriété de la superdilatation : appliquer D_p revient à appliquer d_p puis D_{p+1} quel que soit le nombre de départ. En effet, dans le cas de la superdilatation directe D_p , on développe le nombre initial en base p itérée, puis on remplace les p par des ω . Dans le cas de la superdilatation indirecte (d_p suivie de D_{p+1}), on dilate d'abord le nombre, c'est-à-dire qu'on le développe en base p itérée et l'on remplace les p par des $p+1$, puis seulement intervient la superdilatation, où l'on remplace les $p+1$ par des ω , et le résultat final est le même. Vérifions-le avec 4 comme nombre de départ et avec $p = 2$. La superdilatation calculée directement est $D_2(4) = \omega^\omega$, car on remplace 2^2 par ω^ω . La superdilatation indirecte mène à $d_2(4) = 3^3$, puis $D_3(d_2(4)) = D_3(3^3) = \omega^\omega$ aussi.

Une autre propriété de la superdilatation, déterminante pour démontrer le théorème de Goodstein, est que D_p est une fonction croissante pour chaque p . Par exemple, $D_2(4)$ est supérieur à $D_2(2)$.

Les supersuites de Goodstein

Après les superdilatations, définissons maintenant des suites d'ordinaux G , sorte de super-suites de Goodstein : l'élément $G_p(n)$ est l'ordinal $D_{p+1}(g_p(n))$. Voyons des exemples, et d'abord pour la graine 2 :

$$G_1(2) = D_2(g_1(2)) = D_2(2) = \omega, \\ G_2(2) = D_3(g_2(2)) = D_3(d_2(g_1(2)) - 1) = D_3(d_2(2) - 1) = D_3(3 - 1) = 2.$$

Pour la graine 4, on trouve :

$$G_1(4) = D_2(g_1(4)) = D_2(4) = \omega^\omega, \\ G_2(4) = D_3(g_2(4)) = D_3(d_2(g_1(4)) - 1) = D_3(d_2(2^2) - 1) = D_3(3^3 - 1) = D_3(26) = D_3(3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2) = \omega^2 \times 2 + \omega \times 2 + 2.$$

Dans ces exemples, on a $G_1(2) > G_2(2)$ et $G_1(4) > G_2(4)$. Le schéma de la figure 2 généralise ce résultat et montre que les ordinaux $G_p(n)$ forment une suite strictement décroissante avec p , pour chaque graine n . Alors, une telle suite atteint 0 en un nombre fini d'étapes. Comme $G_p(n)$ ne peut valoir 0 que si $g_p(n)$ lui-même vaut 0, $g_p(n)$ atteint 0 en un nombre fini d'étapes, ce qui termine la démonstration du théorème de Goodstein.

3. SUITE DE GOODSTEIN DE GRAINE 4

Calculons la suite de Goodstein de graine 4. On trouve $g_1(4) = 4$, $g_2(4) = d_2(4) - 1 = d_2(2^2) - 1 = 3^3 - 1 = 26$. $g_3(4)$ est égal à $d_3(26) - 1$, soit $d_3(3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2) - 1 = (4^2 \times 2 + 4 \times 2 + 2) - 1 = 41$.

Continuons : $g_4(4) = d_4(41) - 1 = d_4(4^2 \times 2 + 4 \times 2 + 1) - 1 = (5^2 \times 2 + 5 \times 2 + 1) - 1 = 60$. $g_5(4) = d_5(60) - 1 = d_5(5^2 \times 2 + 5 \times 2) - 1 = (6^2 \times 2 + 6 \times 2) - 1 = 83$.

Quel que soit p , $g_p(4)$ a toujours un développement en base $p+1$ de la forme $(p+1)^2 \times a_p + (p+1) \times b_p + c_p$, avec $a_p \leq 2$, $b_p \leq p$ et $c_p \leq p$. Démontrons cette formule, très utile pour prouver que la suite de graine 4 atteint 0. La formule est vraie pour $g_2(4) = 26 = 3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2$. Ici, on a $a_2 = 2$, $b_2 = 2$ et $c_2 = 2$, que nous notons $(2, 2, 2)$. La formule est conservée quand nous passons de $g_p(4)$ à $g_{p+1}(4)$, comme le montre l'étude des différents cas. L'évolution de a , b et c est similaire au compte à rebours d'une horloge où a représenterait les heures, b les minutes et c les secondes ; cependant, l'horloge, détraquée, ne fonctionne plus en base 12, mais dans une base p qui augmente !

Premier cas : $c_p \neq 0$. La présence du facteur -1 diminue c et laisse a et b inchangés. Par exemple, on trouve $(a_2, b_2, c_2) = (2, 2, 2)$, $(a_3, b_3, c_3) = (2, 2, 1)$.

On a alors $a_{p+1} = a_p$, $b_{p+1} = b_p$, $c_{p+1} = c_p - 1$.

Deuxième cas : $c_p = 0$ et $b_p = 0$, comme dans $(a_4, b_4, c_4) = (2, 2, 0)$. Alors, à l'itération suivante, b diminue d'une unité et c réapparaît avec une valeur égale à la base diminuée de 1, c'est-à-dire p . On obtient $(a_5, b_5, c_5) = (2, 1, 5)$. Dans ce cas, $a_{p+1} = a_p$, $b_{p+1} = b_p - 1$ et $c_{p+1} = p$. Le coefficient b diminue seulement quand c égale 0, ce qui prend de plus en plus de temps car c réapparaît avec la valeur p , de plus en plus grande.

Troisième cas, $b_p = 0$ et $c_p \neq 0$, comme dans $(a_{22}, b_{22}, c_{22}) = (2, 0, 0)$. À l'itération suivante, on a $a_{p+1} = a_p - 1$, $b_{p+1} = p$, $c_{p+1} = p$, comme dans $(a_{23}, b_{23}, c_{23}) = (1, 23, 23)$. Ensuite, on obtient $(1, 0, 0)$ pour $p = 3 \times 2^{27} - 2$, à la suite de quoi a devient nul et les expressions prennent la forme $(p+1) \times b_p + c_p$. Ensuite, on obtient $(0, 1, 0)$, soit $g_p(4) = p+1$, pour $p = 3 \times 2^{27} \times 2^{3 \times 2^{27} - 2} - 1$; finalement, on atteint $(0, 0, 0)$, soit $g_p(4) = 0$ pour $p = 3 \times 2^{27+3 \times 2^{27} - 1} - 2$, soit $p = 3 \times 2^{402\,653\,211} - 2$, un entier dont l'écriture en base 10 a environ 130 millions de chiffres.

p	(a, b, c)
2	(2, 2, 2)
3	(2, 2, 1)
4	(2, 2, 0)
5	(2, 1, 5)
6	(2, 1, 4)
7	(2, 1, 3)
...	...
10	(2, 1, 0)
11	(2, 0, 11)
12	(2, 0, 10)
...	...
22	(2, 0, 0)
23	(1, 23, 23)
...	...
46	(1, 23, 0)
47	(1, 22, 47)
48	(1, 22, 46)
...	...