pas vraiment en action, et nous aboutissons à $g_6(3) = 0$.

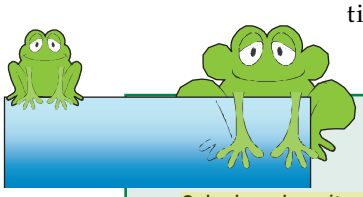
Le cas de la graine 4 gagne en revanche en intérêt… et devient plus compliqué. La suite atteint en effet la valeur 0 au bout d'un nombre d'étapes gigantesque *(voir la figure 3)*. Dans le cas de la graine 5, et, *a fortiori*, des suivantes, les démonstrations paraissent hors de portée, car le nombre d'étapes augmente considérablement avec la valeur de la graine. Le théorème de Goodstein serait-il donc impossible à démontrer?

Non. Il existe bien une démonstration, valable pour tout n, mais elle nécessite de sortir du cadre de l'arithmétique et de recourir à une autre méthode : les ordinaux. Les ordinaux sont une prolongation de la suite des entiers, introduite à la fin du siècle dernier par le mathématicien allemand Georg Cantor *(voir la figure 1)*. Ils comprennent donc les entiers et, plus grands que tous les entiers, les ordinaux infinis, aussi appelés «transfinis», c'est-à-dire «au-delà du fini». Deux points importent pour la démonstration du théorème de Goodstein : a) Les ordinaux sont munis d'une arithmétique similaire à celle des entiers (les quatre opérations de base) ; b) Toute suite décroissante d'ordinaux parvient à la valeur 0 en un nombre fini d'étapes *(voir la figure 4)*.

Le théorème de Goodstein se démontre comme suit. Nous introduisons, pour chaque entier p, une «superdilatation» D_p définie comme d_p, à cela près qu'au lieu de remplacer p par $p+1$ dans le développement en base p itérée, p est remplacé par l'ordinal infini ω. Ainsi, la relation $266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$ entraîne $D_2(266) = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega$, à comparer avec $d_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3$.

Examinons une propriété de la superdilatation : appliquer D_p revient à appliquer d_p puis D_{p+1} quel que soit le nombre de départ. En effet, dans le cas de la superdilatation directe D_p, on développe le nombre initial en base p itérée, puis on remplace les p par des ω. Dans le cas de la superdilatation indirecte (d_p suivie de D_{p+1}), on dilate d'abord le nombre, c'est-à-dire qu'on le développe en base p itérée et l'on remplace les p par des $p+1$, puis seulement intervient la superdilatation, où l'on remplace les $p+1$ par des ω, et le résultat final est le même. Vérifions-le avec 4 comme nombre de départ et avec $p = 2$. La superdilatation calculée directement est $D_2(4) = \omega^\omega$, car on remplace 2^2 par ω^ω. La superdilatation indirecte mène à $d_2(4) = 3^3$, puis $D_3(d_2(4)) = D_3(3^3) = \omega^\omega$ aussi.

Une autre propriété de la superdilatation, déterminante pour démontrer le théorème de Goodstein, est que D_p est une fonction croissante pour chaque p. Par exemple, $D_2(4)$ est supérieur à $D_2(2)$.



3. SUITE DE GOODSTEIN DE GRAINE 4

Calculons la suite de Goodstein de graine 4. On trouve $g_1(4) = 4$, $g_2(4) = d_2(4) - 1 = d_2(2^2) - 1 = 3^3 - 1 = 26$.
$g_3(4)$ est égal à $d_3(26) - 1$, soit $d_3(3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2) - 1 = (4^2 \times 2 + 4 \times 2 + 2) - 1 = 41$.

Continuons : $g_4(4) = d_4(41) - 1 = d_4(4^2 \times 2 + 4 \times 2 + 1) - 1 = (5^2 \times 2 + 5 \times 2 + 1) - 1 = 60$.
$g_5(4) = d_5(60) - 1 = d_5(5^2 \times 2 + 5 \times 2) - 1 = (6^2 \times 2 + 6 \times 2) - 1 = 83$.

Quel que soit p, $g_p(4)$ a toujours un développement en base p +1 de la forme $(p+1)^2 \times a_p + (p+1) \times b_p + c_p$, avec $a_p \leq 2$, $b_p \leq p$ et $c_p \leq p$. Démontrons cette formule, très utile pour prouver que la suite de graine 4 atteint 0. La formule est vraie pour $g_2(4) = 26 = 3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2$. Ici, on a $a_2 = 2$, $b_2 = 2$ et $c_2 = 2$, que nous notons (2, 2, 2). La formule est conservée quand nous passons de $g_p(4)$ à $g_{p+1}(4)$, comme le montre l'étude des différents cas. L'évolution de a, b et c est similaire au compte à rebours d'une horloge où a représenterait les heures, b les minutes et c les secondes ; cependant, l'horloge, détraquée, ne fonctionne plus en base 12, mais dans une base p qui augmente !

Premier cas : $c_p \neq 0$. La présence du facteur -1 diminue c et laisse a et b inchangés. Par exemple, on trouve $(a_2, b_2, c_2) = (2, 2, 2)$, $(a_3, b_3, c_3) = (2, 2, 1)$.
On a alors $a_{p+1} = a_p$, $b_{p+1} = b_p$, $c_{p+1} = c_p - 1$.

Deuxième cas : $c_p = 0$ et $b_p = 0$, comme dans $(a_4, b_4, c_4) = (2, 2, 0)$. Alors, à l'itération suivante, b diminue d'une unité et c réapparaît avec une valeur égale à la base diminuée de 1, c'est-à-dire p. On obtient $(a_5, b_5, c_5) = (2, 1, 5)$. Dans ce cas, $a_{p+1} = a_p$, $b_{p+1} = b_p - 1$ et $c_{p+1} = p$. Le coefficient b diminue seulement quand c égale 0, ce qui prend de plus en plus de temps car c réapparaît avec la valeur p, de plus en plus grande.

Troisième cas, $b_p = 0$ et $c_p \neq 0$, comme dans $(a_{22}, b_{22}, c_{22}) = (2, 0, 0)$. À l'itération suivante, on a $a_{p+1} = a_p - 1$, $b_{p+1} = p$, $c_{p+1} = p$, comme dans $(a_{23}, b_{23}, c_{23}) = (1, 23, 23)$. Ensuite, on obtient $(1, 0, 0)$ pour $p = 3 \times 2^{27} - 2$, à la suite de quoi a devient nul et les expressions prennent la forme $(p+1) \times b_p + c_p$. Ensuite, on obtient $(0, 1, 0)$, soit $g_p(4) = p + 1$, pour $p = 3 \times 2^{27} \times 2^{3 \times 2^{27}-2} - 1$; finalement, on atteint $(0, 0, 0)$, soit $g_p(4) = 0$ pour $p = 3 \times 2^{27+3\times 2^{27}-1} - 2$, soit $p = 3 \times 2^{402\,653\,211} - 2$, un entier dont l'écriture en base 10 a environ 130 millions de chiffres.

p	(a, b, c)
2	(2, 2, 2)
3	(2, 2, 1)
4	(2, 2, 0)
5	(2, 1, 5)
6	(2, 1, 4)
7	(2, 1, 3)
...	...
10	(2, 1, 0)
11	(2, 0, 11)
12	(2, 0, 10)
...	...
22	(2, 0, 0)
23	(1, 23, 23)
...	...
46	(1, 23, 0)
47	(1, 22, 47)
48	(1, 22, 46)
...	...

Les supersuites de Goodstein

Après les superdilatations, définissons maintenant des suites d'ordinaux G, sorte de super-suites de Goodstein : l'élément $G_p(n)$ est l'ordinal $D_{p+1}(g_p(n))$. Voyons des exemples, et d'abord pour la graine 2 :
$G_1(2) = D_2(g_1(2)) = D_2(2) = \omega$,
$G_2(2) = D_3(g_2(2)) = D_3(d_2(g_1(2)) - 1) = D_3(d_2(2) - 1) = D_3(3 - 1) = 2$.
Pour la graine 4, on trouve :
$G_1(4) = D_2(g_1(4)) = D_2(4) = \omega^\omega$,
$G_2(4) = D_3(g_2(4)) = D_3(d_2(g_1(4)) - 1) = D_3(d_2(2^2) - 1) = D_3(3^3 - 1) = D_3(26) = D_3(3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2) = \omega^2 \times 2 + \omega \times 2 + 2$.
Dans ces exemples, on a $G_1(2) > G_2(2)$ et $G_1(4) > G_2(4)$. Le schéma de la figure 2 généralise ce résultat et montre que les ordinaux $G_p(n)$ forment une suite strictement décroissante avec p, pour chaque graine n. Alors, une telle suite atteint 0 en un nombre fini d'étapes. Comme $G_p(n)$ ne peut valoir 0 que si $g_p(n)$ lui-même vaut 0, $g_p(n)$ atteint 0 en un nombre fini d'étapes, ce qui termine la démonstration du théorème de Goodstein.