pas vraiment en action, et nous aboutissons à $g_6(3) = 0$.

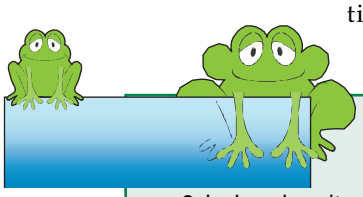
Le cas de la graine 4 gagne en revanche en intérêt… et devient plus compliqué. La suite atteint en effet la valeur 0 au bout d'un nombre d'étapes gigantesque *(voir la figure 3)*. Dans le cas de la graine 5, et, *a fortiori*, des suivantes, les démonstrations paraissent hors de portée, car le nombre d'étapes augmente considérablement avec la valeur de la graine. Le théorème de Goodstein serait-il donc impossible à démontrer?

Non. Il existe bien une démonstration, valable pour tout n, mais elle nécessite de sortir du cadre de l'arithmétique et de recourir à une autre méthode : les ordinaux. Les ordinaux sont une prolongation de la suite des entiers, introduite à la fin du siècle dernier par le mathématicien allemand Georg Cantor *(voir la figure 1)*. Ils comprennent donc les entiers et, plus grands que tous les entiers, les ordinaux infinis, aussi appelés «transfinis», c'est-à-dire «au-delà du fini». Deux points importent pour la démonstration du théorème de Goodstein : a) Les ordinaux sont munis d'une arithmétique similaire à celle des entiers (les quatre opérations de base) ; b) Toute suite décroissante d'ordinaux parvient à la valeur 0 en un nombre fini d'étapes *(voir la figure 4)*.

Le théorème de Goodstein se démontre comme suit. Nous introduisons, pour chaque entier p, une «superdilatation» D_p définie comme d_p, à cela près qu'au lieu de remplacer p par $p+1$ dans le développement en base p itérée, p est remplacé par l'ordinal infini ω. Ainsi, la relation $266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$ entraîne $D_2(266) = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega$, à comparer avec $d_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3$.

Examinons une propriété de la superdilatation : appliquer D_p revient à appliquer d_p puis D_{p+1} quel que soit le nombre de départ. En effet, dans le cas de la superdilatation directe D_p, on développe le nombre initial en base p itérée, puis on remplace les p par des ω. Dans le cas de la superdilatation indirecte (d_p suivie de D_{p+1}), on dilate d'abord le nombre, c'est-à-dire qu'on le développe en base p itérée et l'on remplace les p par des $p+1$, puis seulement intervient la superdilatation, où l'on remplace les $p+1$ par des ω, et le résultat final est le même. Vérifions-le avec 4 comme nombre de départ et avec $p = 2$. La superdilatation calculée directement est $D_2(4) = \omega^\omega$, car on remplace 2^2 par ω^ω. La superdilatation indirecte mène à $d_2(4) = 3^3$, puis $D_3(d_2(4)) = D_3(3^3) = \omega^\omega$ aussi.

Une autre propriété de la superdilatation, déterminante pour démontrer le théorème de Goodstein, est que D_p est une fonction croissante pour chaque p. Par exemple, $D_2(4)$ est supérieur à $D_2(2)$.



3. SUITE DE GOODSTEIN DE GRAINE 4

Calculons la suite de Goodstein de graine 4. On trouve $g_1(4) = 4$, $g_2(4) = d_2(4) - 1 = d_2(2^2) - 1 = 3^3 - 1 = 26$.
$g_3(4)$ est égal à $d_3(26) - 1$, soit $d_3(3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2) - 1 = (4^2 \times 2 + 4 \times 2 + 2) - 1 = 41$.

Continuons : $g_4(4) = d_4(41) - 1 = d_4(4^2 \times 2 + 4 \times 2 + 1) - 1 = (5^2 \times 2 + 5 \times 2 + 1) - 1 = 60$.
$g_5(4) = d_5(60) - 1 = d_5(5^2 \times 2 + 5 \times 2) - 1 = (6^2 \times 2 + 6 \times 2) - 1 = 83$.

Quel que soit p, $g_p(4)$ a toujours un développement en base p +1 de la forme $(p+1)^2 \times a_p + (p+1) \times b_p + c_p$, avec $a_p \leq 2$, $b_p \leq p$ et $c_p \leq p$. Démontrons cette formule, très utile pour prouver que la suite de graine 4 atteint 0. La formule est vraie pour $g_2(4) = 26 = 3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2$. Ici, on a $a_2 = 2$, $b_2 = 2$ et $c_2 = 2$, que nous notons (2, 2, 2). La formule est conservée quand nous passons de $g_p(4)$ à $g_{p+1}(4)$, comme le montre l'étude des différents cas. L'évolution de a, b et c est similaire au compte à rebours d'une horloge où a représenterait les heures, b les minutes et c les secondes ; cependant, l'horloge, détraquée, ne fonctionne plus en base 12, mais dans une base p qui augmente !

Premier cas : $c_p \neq 0$. La présence du facteur – 1 diminue c et laisse a et b inchangés. Par exemple, on trouve $(a_2, b_2, c_2) = (2, 2, 2)$, $(a_3, b_3, c_3) = (2, 2, 1)$.
On a alors $a_{p+1} = a_p$, $b_{p+1} = b_p$, $c_{p+1} = c_p - 1$.

Deuxième cas : $c_p = 0$ et $b_p = 0$, comme dans $(a_4, b_4, c_4) = (2, 2, 0)$. Alors, à l'itération suivante, b diminue d'une unité et c réapparaît avec une valeur égale à la base diminuée de 1, c'est-à-dire p. On obtient $(a_5, b_5, c_5) = (2, 1, 5)$. Dans ce cas, $a_{p+1} = a_p$, $b_{p+1} = b_p - 1$ et $c_{p+1} = p$. Le coefficient b diminue seulement quand c égale 0, ce qui prend de plus en plus de temps car c réapparaît avec la valeur p, de plus en plus grande.

Troisième cas, $b_p = 0$ et $c_p \neq 0$, comme dans $(a_{22}, b_{22}, c_{22}) = (2, 0, 0)$. À l'itération suivante, on a $a_{p+1} = a_p - 1$, $b_{p+1} = p$, $c_{p+1} = p$, comme dans $(a_{23}, b_{23}, c_{23}) = (1, 23, 23)$. Ensuite, on obtient (1, 0, 0) pour $p = 3 \times 2^{27} - 2$, à la suite de quoi a devient nul et les expressions prennent la forme $(p+1) \times b_p + c_p$. Ensuite, on obtient (0, 1, 0), soit $g_p(4) = p + 1$, pour $p = 3 \times 2^{27} \times 2^{3 \times 2^{27}-2} - 1$; finalement, on atteint (0, 0, 0), soit $g_p(4) = 0$ pour $p = 3 \times 2^{27+3\times 2^{27}-1} - 2$, soit $p = 3 \times 2^{402\,653\,211} - 2$, un entier dont l'écriture en base 10 a environ 130 millions de chiffres.

p	(a, b, c)
2	(2, 2, 2)
3	(2, 2, 1)
4	(2, 2, 0)
5	(2, 1, 5)
6	(2, 1, 4)
7	(2, 1, 3)
…	…
10	(2, 1, 0)
11	(2, 0, 11)
12	(2, 0, 10)
…	…
22	(2, 0, 0)
23	(1, 23, 23)
…	…
46	(1, 23, 0)
47	(1, 22, 47)
48	(1, 22, 46)
…	…

Les supersuites de Goodstein

Après les superdilatations, définissons maintenant des suites d'ordinaux G, sorte de super-suites de Goodstein : l'élément $G_p(n)$ est l'ordinal $D_{p+1}(g_p(n))$. Voyons des exemples, et d'abord pour la graine 2 :
$G_1(2) = D_2(g_1(2)) = D_2(2) = \omega$,
$G_2(2) = D_3(g_2(2)) = D_3(d_2(g_1(2)) - 1) = D_3(d_2(2) - 1) = D_3(3 - 1) = 2$.
Pour la graine 4, on trouve :
$G_1(4) = D_2(g_1(4)) = D_2(4) = \omega^\omega$,
$G_2(4) = D_3(g_2(4)) = D_3(d_2(g_1(4)) - 1) = D_3(d_2(2^2) - 1) = D_3(3^3 - 1) = D_3(26) = D_3(3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2) = \omega^2 \times 2 + \omega \times 2 + 2$.
Dans ces exemples, on a $G_1(2) > G_2(2)$ et $G_1(4) > G_2(4)$. Le schéma de la figure 2 généralise ce résultat et montre que les ordinaux $G_p(n)$ forment une suite strictement décroissante avec p, pour chaque graine n. Alors, une telle suite atteint 0 en un nombre fini d'étapes. Comme $G_p(n)$ ne peut valoir 0 que si $g_p(n)$ lui-même vaut 0, $g_p(n)$ atteint 0 en un nombre fini d'étapes, ce qui termine la démonstration du théorème de Goodstein.

L'infini indispensable ?

Le théorème de Goodstein est une propriété d'arithmétique, au sens où il ne met en jeu que les nombres entiers et leurs quatre opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division), mais la démonstration que nous venons de donner repose sur l'utilisation d'objets infinis. En existe-t-il une autre qui ne passerait pas par l'infini ?

La démonstration d'un théorème n'utilise pas toujours que les outils avec lesquels il est formulé. De nombreux résultats d'arithmétique sont démontrés grâce à l'analyse, c'est-à-dire aux nombres réels et aux fonctions. Ceci a donné naissance à la théorie analytique des nombres (par opposition à la théorie algébrique des nombres, qui n'utilise que les entiers). Or, un nombre réel vraiment quelconque n'est exprimé ni par des fractions ni par des racines n-ièmes : c'est un objet dont le développement possède une suite infinie de chiffres après la virgule et, plus généralement, dont toutes les écritures sont infinies. Dès qu'une démonstration d'arithmétique utilise des nombres réels, une certaine forme d'infini y est donc présente. Notons cependant qu'il peut exister une autre démonstration alternative à l'utilisation de l'analyse et fondée seulement sur les entiers et leurs quatre opérations, mais elle est souvent très difficile à trouver. Ainsi, le célèbre théorème des nombres premiers, démontré à l'aide des nombres complexes par J. Hadamard et C. de La Vallée-Poussin en 1896, n'a été démontré par l'arithmétique que plus de cinquante ans plus tard, grâce à Selberg et Erdös. Leur démonstration est par ailleurs beaucoup plus compliquée que l'originale.

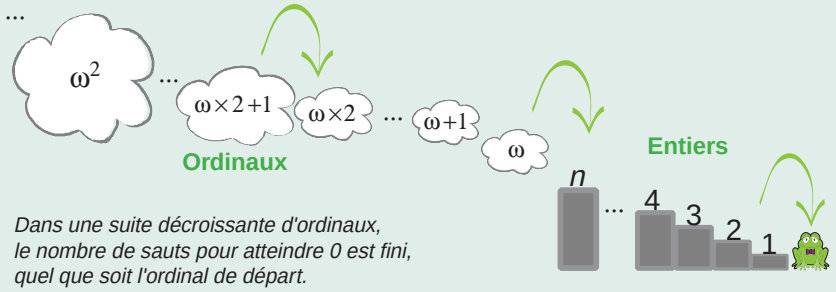

Guiseppe Peano

Précisons ce qu'on appelle une démonstration d'arithmétique. Les propriétés de base de l'arithmétique sont décrites par le système d'axiomes proposé à la fin du XIX^{e} siècle par Giuseppe Peano, mathématicien italien mort en 1932. Toutes les propriétés de base des entiers peuvent se démontrer dans le système de Peano, donc par récurrence : bien sûr, toutes les démonstrations d'un livre d'arithmétique ne sont pas des récurrences, mais on pourrait toujours s'y ramener, au moins de façon théorique.

4. SUITES DÉCROISSANTES D'ORDINAUX

Construisons une suite strictement décroissante à partir d'un entier, même très grand, disons 10^9. Nous arriverons alors nécessairement à 0 après au plus 10^9 étapes. En revanche, puisqu'il y a une infinité d'entiers sous l'ordinal ω, nous pourrions penser que, partant de ω, il est possible de descendre une infinité de fois. Il n'en est rien, car, si nous construisons une suite strictement décroissante partant de $\alpha_1 = \omega$, il faut choisir pour α_2 un ordinal strictement plus petit que ω, c'est-à-dire un entier : si nous choisissons $\alpha_2 = 12$, nous atteindrons 0 au plus 12 étapes plus tard. Si nous choisissons $\alpha_2 = 10^9$, nous pourrons descendre 10^9 marches avant d'arriver à 0, ce qui est plus, mais est toujours un nombre fini. Ainsi, à la différence du cas où nous partons d'un entier, il est impossible de donner de borne sur la longueur d'une suite descendant de ω à 0, il existe des suites aussi longues qu'on veut, *mais* chacune d'entre elles est néanmoins finie.

L'argument est le même lorsqu'on part d'ordinaux plus grands. Ainsi, si nous partons de $\alpha_1 = \omega^2$, nous devons choisir α_2 strictement plus petit, ce qui nous oblige à un saut infini : un tel α_2 est de la forme $\omega \times p + q$, où p et q sont des entiers. De là, au plus q étapes de descentes mènent à $\omega \times p$ (nous envisageons ici le pire cas), et, à l'étape suivante, nous arrivons à un ordinal de la forme $\omega \times (p - 1) + q$, et ainsi de suite. Après au plus p sauts du même type, on arrive aux entiers, et donc à 0. Toute suite décroissante d'ordinaux parvient à la valeur zéro en un nombre fini d'étapes.



Dans une suite décroissante d'ordinaux, le nombre de sauts pour atteindre 0 est fini, quel que soit l'ordinal de départ.

Théorème de Kirby et Paris

Alors ? Pourrions-nous démontrer aussi, avec un peu d'astuce, le théorème de Goodstein par récurrence sans recourir à l'infini ? Non : un théorème, démontré en 1981 par Laurence Kirby et Jeffrey Paris, et basé sur une méthode que ce dernier avait mise au point en 1978 avec Leo Harrington, affirme que, quelle que soit notre imagination, nous n'arriverons jamais à montrer le théorème de Goodstein par récurrence, c'est-à-dire en ne nous servant que des entiers et des quatre opérations élémentaires. Ce résultat est remarquable (et sa démonstration très difficile !) et fait la spécificité du théorème de Goodstein. De façon plus précise, il affirme que la fonction qui, à chaque graine n, associe l'entier p pour lequel $g_p(n)$ s'annule est une fonction qui prend des valeurs tellement grandes qu'elle finit par dépasser n'importe quelle fonction dont on peut montrer l'existence par récurrence.

Comme elle utilise l'ordinal ω, objet infini, la démonstration du théorème de Goodstein n'est pas une preuve par récurrence. Notons qu'il suffit d'ajouter l'hypothèse qu'il existe un objet infini au système de Peano pour obtenir, sans avoir à ajouter de nouveau postulat, toute l'arithmétique des ordinaux (utilisée dans la preuve de Goodstein). Du point de vue des hypothèses logiques sous-jacentes, ceci place le théorème de Goodstein juste au-dessus de l'arithmétique de Peano. Cet ajout représente exactement l'écart entre l'infini potentiel (présent dans l'arithmétique, où le principe de récurrence postule l'existence d'une suite d'entiers sans fin) et l'infini actuel (présent dans les ordinaux, où existe un objet infini).


Kurt Gödel

... Et Gödel

Il existe un rapport étroit entre ce qui précède et les célèbres théorèmes d'incomplétude démontrés par Kurt Gödel au début des années 1930.

Le premier théorème d'incomplétude énonce qu'il existe une propriété d'arithmétique qui est vraie, mais qui ne peut pas être démontrée par