

nombre n n'est pas défini. Concrètement, le calcul se poursuit à l'infini. C'est ce que Kleene appelle le mouvement perpétuel. Ce mécanisme de recherche à l'infini offert par le schéma *mu* se retrouve dans les boucles *While* des programmes informatiques ; le programme «boucle» tant que $|x^2 - 10|$ est différent de 0.

Traditionnellement, un algorithme était une recette de calcul qui fournissait toujours un résultat après un nombre fini d'opérations ; avec le schéma *mu*, l'univers des algorithmes s'élargit et, dans certains cas, le calcul se prolonge à l'infini et ne donne jamais de résultat. On dénomme parfois de tels algorithmes, des semi-algorithmes.

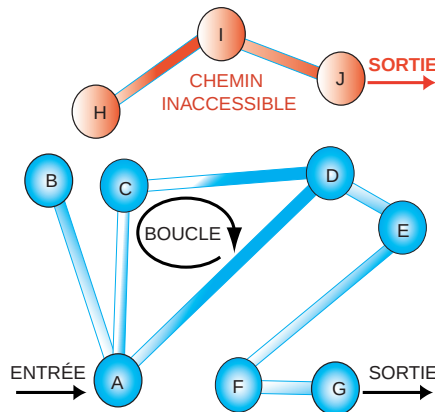
Maîtriser l'infini

Le schéma *mu* permet de définir des semi-algorithmes qui recherchent un certain objet dans un ensemble infini, sans même savoir si un tel objet existe. Un programme informatique qui recherche la sortie dans un labyrinthe est une illustration du schéma *mu*. Par exemple, on peut chercher un chemin qui va de A à G dans le labyrinthe de l'illustration ci-contre, et l'on trouvera peut-être le chemin A, D, E, F, G. Si l'on cherche un chemin allant de A à J, on n'en trouvera pas.

Comment procède-t-on pour trouver le chemin qui va de A à G ?

Le nombre de chemins dans un labyrinthe est infini : on peut très bien se perdre en parcourant une boucle, en passant de A en D, de D en C et de C en A, sans jamais prendre le couloir qui va de D vers E. Pour trouver la sortie d'un labyrinthe, il ne suffit pas de faire la liste des chemins en allant toujours droit devant soi ; il faut énumérer les chemins de manière systématique afin de n'en oublier aucun, par exemple en prenant tous les chemins de longueur 1 (qui sont en nombre fini), puis tous ceux de longueur 2 (qui sont également en nombre fini), puis ceux de longueur 3... L'énumération de tous les chemins de tailles finies du labyrinthe permet de trouver la sortie, si celle-ci existe et correspond à un chemin de taille finie, mais énumérera les chemins éternellement s'il n'en existe pas. Ce risque de recherche à l'infini, dans le cas où le problème n'a pas de solution, est inévitable dans un ensemble infini.

Dans le cas du labyrinthe, il est possible d'éviter cette recherche dans un



LA RECHERCHE DE LA SORTIE dans un labyrinthe peut être infinie. Il faut donc borner la recherche en excluant, par exemple, les boucles telle que ACDA.

ensemble infini. Pour traverser un labyrinthe, il n'est jamais nécessaire de passer deux fois par le même carrefour ; s'il y a un chemin qui comporte une boucle, on la supprime et l'on obtient un autre chemin qui mène directement au même endroit.

On se restreint ainsi à chercher une solution parmi les chemins sans boucle. Ces chemins sont alors en nombre fini, et s'il n'y a pas de solution (comme quand on essaie d'aller de A à J), après avoir énuméré tous les chemins et constaté qu'aucun d'eux ne convient, on saura que les deux points ne sont pas reliés. Qu'il y ait une solution ou non, la recherche arrivera à son terme.

Restreindre ainsi l'espace de recherche de manière à le rendre fini, sans pour autant perdre la solution, est le problème principal quand on cherche à concevoir certains algorithmes, par exemple des algorithmes de sortie de labyrinthe : cela s'appelle borner le schéma *mu*. Parfois – comme dans ce cas – cela est possible, mais dans d'autres cas, en particulier quand le problème qu'on cherche à résoudre est indécidable, cela ne l'est pas. Lorsque le problème est indécidable, on ne peut pas toujours, après avoir effectué un nombre fini d'étapes, prédire si la solution existe ou non. Le problème demande une recherche dans un ensemble infini, et donc une recherche à l'infini quand il n'y a pas de solution.

Dans certaines situations, on ne peut éviter la recherche à l'infini, et le schéma *mu* est le bon outil. Mais dans d'autres, par exemple quand on cherche à définir la fonction d'Ackermann, dont les étapes sont certes imprévisibles, mais sont toujours finies, le schéma *mu* semble un outil mal

adapté, car trop puissant, puisqu'il convoque l'infini dans sa recherche. En introduisant le schéma *mu*, Kleene a fait entrer le loup dans la bergerie : l'infini dans la théorie des algorithmes qui était *a priori* le cadre du fini.

Cela est-il dû à une maladresse de Kleene ou cette intrusion de l'infini dans l'univers des algorithmes était-elle nécessaire ?

Chasser l'infini ?

Church et Kleene ont montré qu'il ne s'agissait pas d'une maladresse et que cette intrusion était inévitable. En effet, tous les procédés de définition d'algorithmes qui se limitent à définir des fonctions qui donnent toujours un résultat après un nombre fini d'opérations (c'est-à-dire qui excluent ce mécanisme de recherche à l'infini) sont incomplets : on pourra toujours construire une fonction, calculable par un algorithme en un nombre fini d'étapes, mais qui n'est pas définissable par ce procédé. Cette fonction se construit en utilisant la méthode de la diagonale introduite par Georg Cantor pour étudier les cardinaux infinis (voir l'article de Jean-Paul Delahaye, *L'infini est-il paradoxal en mathématiques ?*, page 30).

Il n'y a donc pas de définition qui englobe toutes les fonctions donnant un résultat après un nombre fini d'étapes et rien qu'elles. Certains procédés, comme le schéma *mu*, définissent toutes ces fonctions, mais aussi certaines fonctions qui ne donnent pas de résultat après un nombre fini d'étapes. D'autres procédés comme ceux – plus complexes – proposés par Kurt Gödel en 1941 ou Jean-Yves Girard en 1970 ne permettent de définir que des fonctions qui donnent un résultat en un nombre fini d'étapes. Cependant, ils ne les définissent pas toutes.

Chassez l'infini, il reviendra au galop...

Gilles DOWEK est chargé de recherches à l'Institut national de recherche en informatique et en automatique.

Jean-Luc CHABERT et al., *Histoire des algorithmes*, Belin, 1995.

Richard LASSAIGNE et Michel DE ROUGEMONT, *Logique et fondement de l'informatique*, Hermès, 1993.

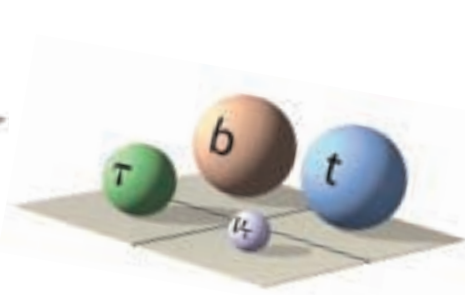
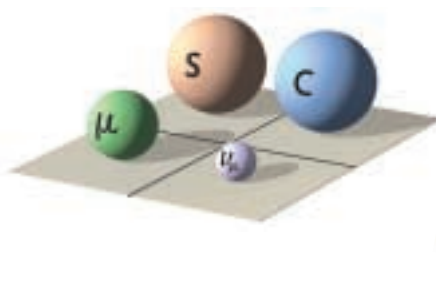
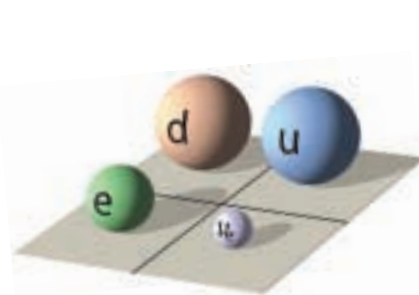
René CORI, *Logique mathématique*, Masson, 1993.

L'infiniment petit en physique

HARALD FRITZSCH

En descendant l'échelle des dimensions, les physiciens ont découvert des particules si petites qu'ils les ont supposées ponctuelles.

Le «modèle standard», la théorie construite sur cette hypothèse, accumule les succès depuis 30 ans, tout en étant pétrie d'infinis...



L'infiniment petit est omniprésent en physique des particules. En principe, aucune idée physique ne devrait faire appel à des notions infinies. Pourtant, les théories utilisées aujourd'hui par les physiciens qui étudient l'Univers à petite échelle supposent des constituants élémentaires ponctuels, donc infiniment petits. Les chercheurs n'ont pas adopté cette idée d'emblée. Partant de notre échelle macroscopique, régie par les lois de la physique classique, ils sont descendus d'étage en étage vers les petites dimensions, dans le domaine où règnent les lois quantiques. L'exploration des échelles atomique, puis nucléaire, puis subnucléaire les a confrontés à des comportements de plus en plus surprenants. Au-dessous du millionième de milliardième de mètre, tout se passe comme si les particules qui interagissent étaient infiniment petites. Les physiciens ont donc construit des théories fondées sur l'hypothèse que ces particules – les électrons et les quarks – sont ponctuelles, et qu'elles interagissent de façon ponctuelle. Extrême, cette thèse a d'abord

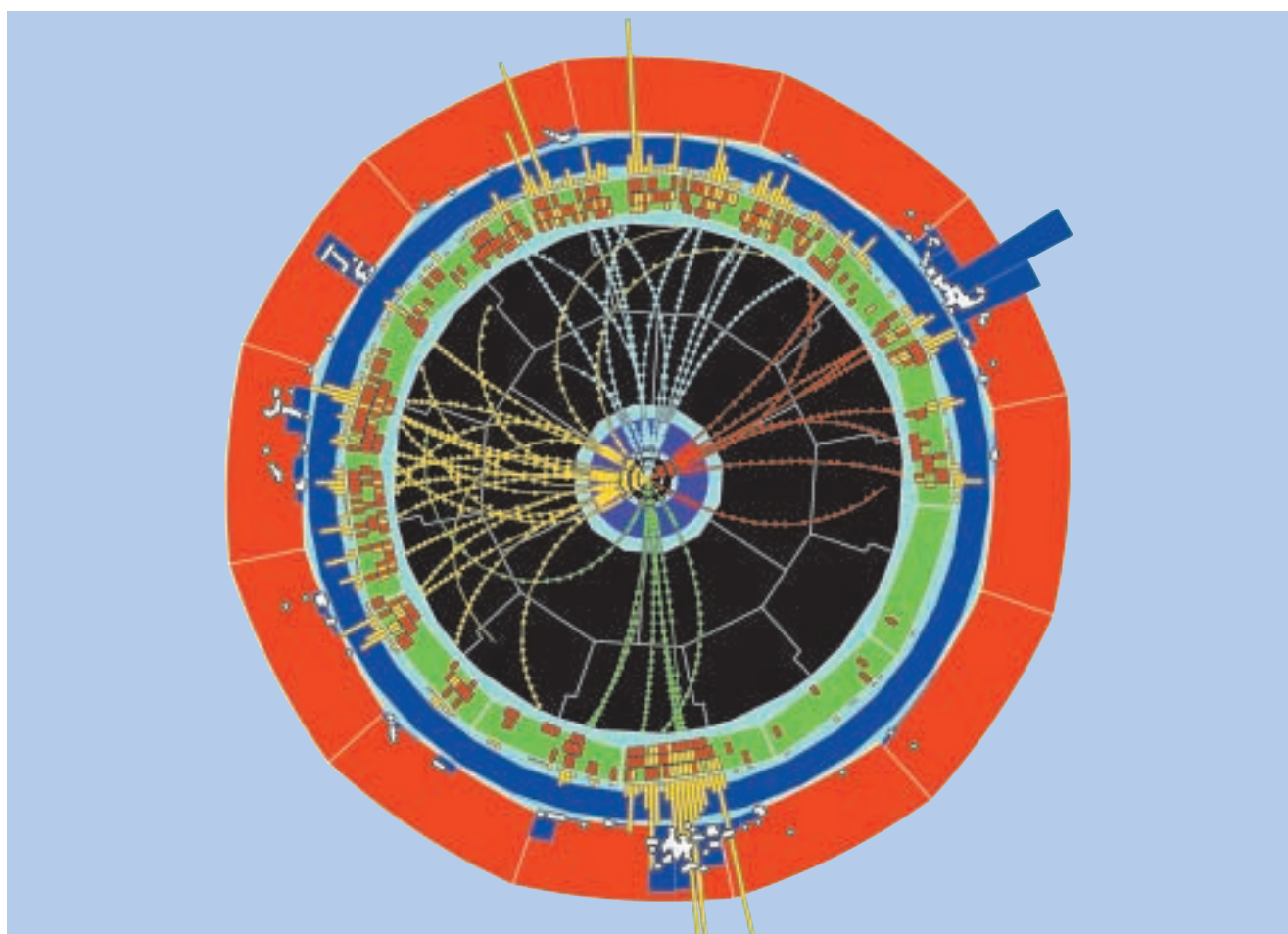
engendré d'immenses difficultés techniques. Toutefois, la première des théories fondée sur elle – l'électrodynamique quantique, qui décrit les interactions entre électrons et photons – devint finalement la plus précise jamais élaborée! Encouragés par ce succès, les physiciens forgèrent des théories sur le même modèle pour décrire les autres interactions. Ils obtinrent ainsi le «modèle standard», qui rend compte avec succès des interactions de toutes les particules. Depuis 30 ans, cet énorme édifice théorique résiste à toutes les tentatives expérimentales pour le mettre en défaut. Les constituants élémentaires sont-ils vraiment ponctuels?

Les physiciens n'ont pas inventé l'infini

Les physiciens n'ont pas inventé l'infini : ils ont commencé à utiliser par nécessité ce concept de mathématicien (voir *Histoire d'infini*, page 64). En mathématique, la notion d'infini apparaît d'une façon «naturelle». On conçoit immédiatement que la suite des nombres naturels est sans fin, donc

qu'elle est infinie. Lorsque les mathématiciens disent qu'une quantité est infinie, ils veulent dire qu'elle (sa valeur absolue) est sans limite supérieure ou, ce qui revient au même, que supposer qu'une telle limite existe conduit à une contradiction logique : n ne peut être le plus grand entier, car $n + 1$ lui est supérieur. À l'inverse, quand ils parlent d'une quantité infiniment petite, cela signifie qu'elle (sa valeur absolue) n'a pas de limite inférieure, sinon zéro. La suite des inverses des nombres naturels, $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$, ne contient

1. PLUS UN OBJET EST PETIT, plus les instruments nécessaires pour le mettre en évidence sont grands. En bas, le détecteur *Aleph*, à l'aide duquel les physiciens du CERN ont récemment découvert une nouvelle particule : le boson de Higgs. Si elle se confirme, la découverte est importante, car le boson de Higgs est le dernier élément non découvert prévu par le modèle standard, la théorie la mieux acceptée par les physiciens des particules. Les expérimentateurs du CERN ont constaté que les trajectoires rassemblées dans les faisceaux vert et bleu proviennent de la désintégration d'une grosse particule. Sa masse semble correspondre à celle du boson de Higgs.



CERN

aucune limite inférieure. Pour les mathématiciens, les infinis, tant grands que petits, sont définis grâce à un processus de passage à la limite.

En physique, les situations qui imposent un tel passage ne manquent pas. Au début du XX^e siècle, les astronomes se représentaient l'Univers comme un espace plein d'étoiles, dont le Soleil. Puis ils ont découvert que les étoiles étaient les constituants élémentaires de galaxies, et que des milliards de galaxies existent. L'Univers s'était brusquement agrandi de plusieurs ordres de grandeur. Cette évolution invite à se demander quelles structures encore plus grandes pourraient exister. Et finalement, on s'interroge : le Cosmos est-il infini ? Ces questions restent ouvertes, même si plusieurs indices militent effectivement pour un Univers sans limites.

Il en va de même lorsqu'on essaie d'explorer l'infiniment petit. L'histoire des sciences révèle que l'homme a progressivement appris à diviser de plus en plus la matière. L'un des premiers à y penser fut Démocrite (460-370 avant notre ère). Le philosophe grec a supputé que la matière peut être divisée jusqu'à une échelle ultime, celle de petits constituants élémentaires invisibles, qu'il nomme *Atomos*. Pour Démocrite, comme pour les physiciens d'aujourd'hui, le processus de division de la matière est donc limité. Bien que très petit, un atome n'est pas infiniment petit. Son diamètre est d'environ un dixième de milliardième de mètre, taille qu'une expérience simple met en évidence : un film huileux répandu sur l'eau s'étire jusqu'à atteindre une hauteur qui correspond au diamètre d'une molécule, voire d'un atome. Or, grâce au microscope à effet tunnel, les physiciens sont capables d'observer des atomes. Que voient-ils ? De petites balles de tennis, dont il faudrait 100 millions accolées pour faire un centimètre.

Atomos signifie indivisible

Le mot *Atomos* signifie indivisible en grec ancien. Pourtant le caractère indivisible des atomes a été remis en cause à la fin du XX^e siècle, quand les physiciens ont montré que les atomes peuvent être dissociés en constituants plus petits : le noyau et le nuage électronique. La taille de l'enveloppe impose celle des atomes, tandis que sa masse représente moins d'un millième de leur masse. Le plus simple des atomes est



2. WERNER HEISENBERG est l'un des pères de la mécanique quantique. Les physiciens du début du XX^e siècle ont inventé cette théorie, notamment pour mieux expliquer la structure des atomes.

l'hydrogène. Son enveloppe ne contient qu'un seul électron, chargé négativement, en rotation autour du noyau, qui porte une charge électrique positive. Sa rotation permanente l'empêche d'être attiré par l'attraction électrique qu'exerce le noyau. L'électron se comporte en fait comme une minuscule planète, dont l'orbite est stable parce que la force centrifuge due à la rotation équilibre l'attraction électrique du noyau.

Lorsqu'ils eurent compris cela, les physiciens s'étonnèrent des particularités des systèmes atomiques : tels une infinité de frères jumeaux, tous les atomes d'hydrogène ont la même structure. Or, dans le modèle planétaire, si l'électron tournait plus vite, il serait plus éloigné du noyau. Pourquoi le noyau de l'atome d'hydrogène ne fixe-t-il qu'un seul et unique électron, toujours à la même distance ? Autre mystère : les physiciens savent que les particules chargées accélérées rayonnent de l'énergie sous forme d'ondes électromagnétiques. Or, l'électron est soumis en permanence à une accélération et les particules chargées et accélérées perdent leur énergie en émettant un « rayonnement de freinage ». Pourquoi l'électron de l'atome d'hydrogène n'émet-il aucune onde électromagnétique ? Quel mécanisme le stabilise sur son orbite ? Les physiciens durent se rendre à l'évidence : la physique classique ne suffisait plus à expliquer la stabilité des atomes.

Pour répondre à ces questions, les physiciens du début du XX^e siècle ont créé la mécanique quantique. Le

concept central de la théorie quantique est celui de la probabilité d'événements. Ainsi, on calcule la probabilité qu'un électron se trouve en un endroit précis, à un instant donné ; qui plus est, la position et la vitesse d'un électron ne peuvent être déterminées simultanément. Le physicien allemand Werner Heisenberg fut le premier à formuler cette propriété quantique. Ces « relations d'incertitude de Heisenberg » s'appliquent à tous les systèmes qui ont un comportement quantique. Le calcul montre toutefois que l'approximation classique est excellente pour les systèmes macroscopiques. Si la probabilité quantique qu'une voiture traverse brusquement le mur du garage où elle était garée n'est pas nulle, elle est si faible qu'en pratique l'événement peut être considéré comme impossible !

Atomes hypothétiques

C'est justement cette incertitude sur la position de l'électron qui détermine la taille d'un atome. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, cette taille est égale à 10^{-10} mètre. Supposons que nous observions un atome d'hydrogène, dont l'enveloppe serait beaucoup plus petite, disons cent fois plus petite. L'électron serait alors localisé avec une précision plus grande que dans l'atome d'hydrogène normal. Selon la relation d'incertitude, la précision de la vitesse de l'électron serait dans ce cas 100 fois inférieure, de sorte qu'il devrait se déplacer beaucoup plus vite que dans l'atome normal. Une vitesse plus élevée signifierait aussi une énergie supérieure. Un atome d'hydrogène hypothétiquement plus petit posséderait donc une énergie supérieure à celle d'un atome normal. Or, que ce soit en physique classique ou en mécanique quantique, les systèmes évoluent toujours vers leur état de moindre énergie. Un atome d'hydrogène plus petit que la normale ne serait pas stable, mais perdrait de l'énergie en rayonnant des ondes électromagnétiques : l'électron ralentirait, son enveloppe augmenterait et se stabiliserait lorsque l'atome aurait atteint sa taille « normale ». De même, un atome d'hydrogène hypothétique 100 fois plus grand qu'un atome normal ne serait pas stable. Pour le fabriquer, il faudrait éloigner l'électron du noyau, et donc lui apporter de l'énergie, de façon à contrecarrer l'attraction électrostatique. Pour évoluer vers un état de moindre énergie,