

9. LE VIDE EST SOUMIS AUX FLUCTUATIONS quantiques : en conséquence des particules virtuelles apparaissent spontanément dans le vide pendant des temps très courts, de l'ordre de la constante

h de Planck. Ces particules sont émises en couple, une particule de matière, A et une particule d'antimatière, B. Ainsi, le vide ne l'est jamais tout à fait...

On pourrait penser que, pour un observateur accéléré, le spectre n'est plus isotrope et que l'«avant» et l'«arrière» paraissent différents ; on pourrait aussi imaginer que l'aspect du spectre varie tant que l'observateur est accéléré. En fait, ces intuitions sont erronées : le spectre est homogène et isotrope et il ne change pas tant que l'accélération est constante. En revanche, le spectre observé par un observateur uniformément accéléré n'est pas celui que voit un observateur non accéléré. Pour chaque fréquence, le rayonnement est plus intense dans le référentiel accéléré que dans le référentiel au repos.

La forme du spectre électromagnétique classique pour un observateur accéléré n'est pas facile à comprendre, mais on peut l'interpréter en analysant le mouvement d'un oscillateur placé dans une fusée.

L'accélération, équivalente à un échauffement

L'équation du mouvement de cet oscillateur ressemble beaucoup à l'équation du mouvement dans un référentiel immobile. Il existe cependant deux différences notables : d'une part, la force de réaction au rayonnement comporte un nouveau terme, proportionnel au carré de l'accélération ; d'autre part, l'oscillateur est exposé à un nouveau rayonnement aléatoire lié à l'accélération. Au total, l'énergie moyenne de l'électron accéléré est supérieure à celle de l'électron oscillant dans un référentiel au repos. En d'autres termes, lorsqu'un oscillateur est accéléré, il vibre erratiquement plus fortement dans le vide que s'il était au repos.

Pour comprendre l'effet de l'accélération sur l'oscillateur harmonique, on peut chercher le spectre électromagnétique qui s'ajoute au rayonnement de point zéro pour engendrer ce mouvement supplémentaire. Il faut pour cela considérer le «principe

d'équivalence» sur lequel Einstein fonda sa théorie de la gravitation ; selon ce principe, un observateur, situé dans un petit laboratoire placé dans un champ gravitationnel, effectue exactement les mêmes mesures qu'un observateur placé dans une petite fusée qui accélère uniformément. La physique dans un référentiel accéléré est identique à celle dans un référentiel placé dans un champ gravitationnel uniforme. Comme les lois de la thermodynamique restent valables dans un champ gravitationnel, elles doivent l'être encore dans une fusée qui accélère uniformément : aussi, pour conserver l'équilibre, le spectre du rayonnement supplémentaire ne peut être qu'un spectre thermique. Dans tout autre cas, l'oscillateur ne serait pas en équilibre thermique avec son environnement et il pourrait servir à réaliser une machine à mouvement perpétuel.

La conclusion est directe et étonnante : un système physique uniformément accéléré dans le vide présente les mêmes propriétés à l'équilibre qu'un système non accéléré soumis à un rayonnement thermique à une température supérieure au zéro absolu.

William Unruh, de l'Université de Colombie britannique, et P. Davies, de l'Université de Newcastle-on-Tyne, ont trouvé vers 1976 la relation mathématique qui relie l'accélération à la température. Le spectre réel que peut enregistrer un observateur uniformément accéléré dans le vide est la somme de deux composantes : l'une est due au rayonnement de point zéro ; l'autre est le spectre du rayonnement thermique proposé par Planck en 1900. Planck ne put expliquer la forme de ce spectre qu'en introduisant, à contre-cœur, certaines idées de mécanique quantique ; on découvre aujourd'hui que l'on peut décrire cette courbe avec une analyse entièrement classique du rayonnement dans le vide !

Avec ce type de raisonnement, on obtient néanmoins un résultat surprenant : si l'on se fonde à nouveau sur le principe d'équivalence évoqué précédemment, il doit exister une température minimale au-dessous de laquelle on ne peut pas refroidir les systèmes placés dans les champs gravitationnels. Cette limite est une limite absolue, indépendante de toutes les difficultés pratiques qui s'opposent au refroidissement. À la surface de la Terre, cette limite est égale à 4×10^{-20} kelvins ; elle est bien inférieure aux températures que l'on sait réaliser, mais elle est supérieure à zéro.

Les relations entre le rayonnement thermique et la structure du vide classique révèlent une unité inattendue dans les lois de la physique, mais elle rend plus complexe notre conception du vide. Avec son ensemble de champs électriques et magnétiques aléatoires, le vide reste l'état le plus simple de la nature... aux étonnantes propriétés.

Timothy BOYER est professeur de physique à l'Université de New York.

H. PUTHOFF, a des sites sur internet, dont : <http://www.newphys.se/elektromagnetism/physics/PTHoff/>

T.H. BOYER, *A Brief Survey of Stochastic Electrodynamics*, in *Foundation of Radiations Theory and Quantum Electrodynamics*, sous la direction de A.O. Barut, Plenum Press, 1980.

D.W. SCIAMA, P. CANDELAS et D. DEUTSCH, *Quantum Field Theory, Horizons, and Thermodynamics*, in *Advances in Physics*, vol. 30, n° 3, pp. 327-366, mai-juin 1981.

T.H. BOYER, *Derivation of the Blackbody Radiation Spectrum from the Equivalence Principle ...*, in *Physical Review D*, vol. 29, n° 6, 15 mars 1984.

S. LAMOREAUX, *Demonstration of the Casimir Force in Phys. Rev. Letters*, vol. 78, n° 1, pp. 5-8, janvier 1997.

L'infini est un révélateur

PATRICK DEHORNOY

L'infini est source d'inspiration. L'exploration d'ensembles hyperinfinis, impossibles à construire, mais pas inconcevables, a fait découvrir des objets mathématiques comme les tables de Laver et des propriétés des tresses.

Les tables de Laver sont des tableaux d'entiers dont les propriétés restent très mystérieuses, alors même qu'il est facile de les construire avec un ordinateur. Le plus étrange est que le peu que nous sachions sur ces tables repose sur l'hypothèse indémontrable qu'il existe des ensembles "hyperinfinis". Cela illustre un nouveau type d'applications de l'infini en mathématiques, où celui-ci sert à fournir des intuitions plus que des démonstrations.

Opérations autodistributives

Les tables de Laver ont été découvertes dans les années 1980 par Richard Laver, théoricien des ensembles de l'Université de Boulder, au Colorado.

A côté d'opérations usuelles comme l'addition ou la multiplication, qui vérifient des lois simples comme la com-

mutativité ($x * y = y * x$) ou l'associativité ($x * (y * z) = (x * y) * z$), les mathématiciens étudient d'autres opérations qui vérifient des lois plus exotiques.

Parmi celles-ci figure l'autodistributivité, qui s'exprime par l'égalité $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$, et que nous noterons AD : le nom indique qu'une opération vérifiant la condition AD est distributive par rapport à elle-même, de la même façon qu'on dit la multiplication usuelle distributive par rapport à l'addition, parce qu'elle vérifie $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$. Nous appellerons donc opération autodistributive, ou simplement opération AD, une "multiplication" (sur des objets quelconques, pas nécessairement des nombres) qui vérifie la condition AD quels que soient les choix des éléments x, y, z .

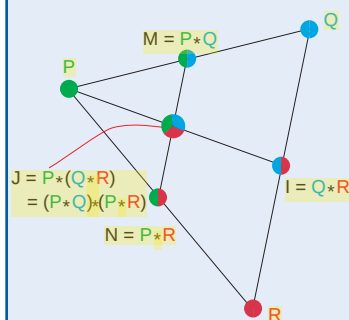
Il n'y aurait guère d'intérêt à choisir des conditions exotiques au hasard



et étudier pour le plaisir les opérations qui satisferaient de telles conditions (s'il en existe). L'intérêt pour les opérations AD provient de l'existence d'exemples non triviaux dans le monde mathématique, en liaison notamment avec d'autres structures importantes comme les groupes (voir l'encadré 1).

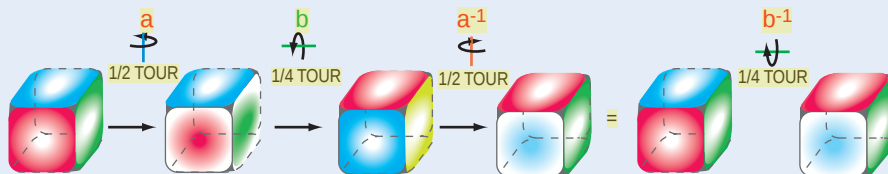
Le rôle de l'infini dans le domaine tient à ce que la considération d'ensembles «hyperinfinis» a mené à la découverte d'exemples d'opérations AD d'un type complètement nouveau (voir l'encadré 4), lesquelles ont donné un nouvel essor à toute la branche.

1. EXEMPLES D'OPÉRATIONS AUTODISTRIBUTIVES



Dans le plan, on définit le «produit» de deux points P et Q comme étant le milieu du segment PQ. Par le théorème de Thalès, cette opération vérifie la condition d'autodistributivité : $P * (Q * R) = (P * Q) * (P * R)$. Un exemple d'opération autodistributive est la conjugaison dans un groupe, notamment

$$\begin{aligned} a * b &= axbxa^{-1} \\ a * (b * c) &= a * (bxcxb^{-1}) = axbxcxb^{-1}xa^{-1} \\ (a * b) * (a * c) &= (axbxa^{-1}) * (axcxa^{-1}) = axbxa^{-1}xaxcxa^{-1}x(axbxa^{-1})^{-1} \\ &= axbxa^{-1}xaxcxa^{-1}xaxb^{-1}xa^{-1} = axbxcxb^{-1}xa^{-1} \end{aligned}$$



un groupe de rotations. Partant de la multiplication $\times$ du groupe, on définit une nouvelle opération $*$ en posant $a * b = axbxa^{-1}$. On vérifie que $a * (b * c)$ et $(a * b) * (a * c)$ sont égaux à $abcb^{-1}a^{-1}$. Un exemple de conjugaison de rotations d'un cube est représenté à droite.

Ceci revient à chercher une sorte de table de Pythagore représentant une «multiplication». Si nous cherchons une table à N éléments, nous pouvons toujours supposer que les éléments de notre table sont les entiers $1, 2, \dots, N$, et notre problème est de construire un tableau à N lignes et N colonnes rempli de nombres entre 1 et N de sorte que, si nous dénommons $p * q$ le nombre qui est à l'intersection de la p -ième ligne et de la q -ième colonne, alors l'opération $*$ (la «multiplication») ainsi définie vérifie la condition AD. Si cela est le cas, nous dirons que nous avons obtenu une AD-table.

Tables de Laver

Supposons que nous fixions les valeurs suivantes :

	1	2	3	N
1	2			
2	3			
3	4			
$\vdots$				
$\vdots$				
$\vdots$				
$\vdots$				
$N-1$	N			
N	1			

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

Or $4 * 1$ est 1, donc on doit avoir $4 * 2 = 1 * 1 = 2$ et notre tableau devient :

Vérifions que les tables de Laver satisfont la loi d'autodistributivité (condition AD) : $p * (q * r) = (p * q) * (p * r)$. Sur le tableau à 4 éléments, choisissons $p = 4$, $q = 3$ et $r = 2$. Le premier membre est égal à $q * r = 3 * 2 = 8$ et $p * (q * r) = p * 8 = 4 * 8 = 8$. Calculons le second membre : $(p * r) = (4 * 2) = 6$; $(p * q) = (4 * 3) = 7$; $(p * q) * (p * r) = 7 * 6 = 8$. L'égalité est vérifiée. Il est facile de programmer la construction des tables de Laver sur un ordinateur, en suivant l'ordre de calcul des valeurs que nous avons indiqué. En utilisant les propriétés de périodicité pour ne pas garder toutes les valeurs en mémoire, on va jusqu'à la table à 1024 éléments sans problème, voire, en opérant avec soin, jusqu'à 2^{20} éléments.

Figure 1 shows a sequence of 16 matrices, labeled q_1 through q_{16} , illustrating the construction of a 16x16 matrix Q . The matrices are arranged in a grid, with q_1 and q_2 in the first row, q_3 and q_4 in the second, and so on, up to q_{15} and q_{16} in the last row. The matrices show a pattern of increasing size and complexity, with the final matrix q_{16} being a 16x16 matrix with a green border and a red interior.

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

De même, $4 * 3 = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 2$

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

De même, $4 * 3 : 4 * 3 = 4 * (2 * 1)$
 $= (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3$, ce qui donne :

Le lecteur pourra établir de même la valeur $4 * 4 = 4$. On passe alors à la ligne de 3. La première valeur à calculer est $3 * 2$, et il vient cette fois $3 * 2 = 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4$. On remplit ainsi la ligne de 3, puis celle de 2 et de 1, parvenant finalement à :

	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

La période de la première ligne atteint 8 dans la table de Laver à 32 éléments, puis 16 dans la table à 512 éléments. Si le théorème de Laver est vrai, il existe des tables où la période de la première ligne vaut 32, et nous pouvons chercher quelle est la taille N de la première table où cela se produit, par exemple en programmant un ordinateur. Cette approche ne risque pas d'aboutir...

En effet, un théorème de Randall Dougherty, de l'université de Columbus, en Ohio, nous dit que le nombre N est au moins $A_9(A_8(A_8(255)))$, où A_k est la k -ième fonction d'Ackermann. Les fonctions A_k sont des fonctions sur les entiers construites de proche en proche, et qui croissent de plus en plus vite : $A_1(n)$ est $n + 1$, $A_2(n)$ est $2n + 3$, $A_3(n)$ est de l'ordre de 2^n , $A_4(n)$ est approximativement une tour d'exponentielles de base 2 et de hauteur n , et, pour tout k , $A_{\{k+1\}}(n)$ s'obtient en appliquant A_k itérée n fois à 1. Le nombre $A_6(255)$ dépasse toute imagination, et que dire de $A_9(A_8(255))$, puis de $A_9(A_8(A_8(255)))$?

Sans risque d'être démenti, on peut affirmer que, quelle que soit la puissance de l'ordinateur utilisée ou l'astuce du programme développé, on trouvera toujours que la période de la première ligne dans une table de Laver est au plus 16. Pourtant le théorème de Laver nous dit que 32 est atteint, mais certainement bien plus loin que là où les ordinateurs savent encore compter...