Abordons ici la question de la construction d'opérations AD, en nous demandant si on peut construire à la main une opération AD sur un ensemble fini quelconque.

Ceci revient à chercher une sorte de table de Pythagore représentant une «multiplication». Si nous cherchons une table à N éléments, nous pouvons toujours supposer que les éléments de notre table sont les entiers 1, 2, ..., N, et notre problème est de construire un tableau à N lignes et N colonnes rempli de nombres entre 1 et N de sorte que, si nous dénommons $p * q$ le nombre qui est à l'intersection de la p-ième ligne et de la q-ième colonne, alors l'opération $*$ (la «multiplication») ainsi définie vérifie la condition AD. Si cela est le cas, nous dirons que nous avons obtenu une AD-table.

De telles tables existent-elles? Certainement : si nous posons $p * q = q$, c'est-à-dire si nous construisons notre tableau en remplissant la première colonne avec des 1 partout, la deuxième avec des 2, etc., on montre que la condition AD est vérifiée, puisque nous aurons toujours $p * (q * r) = r = (p * q) * (p * r)$.

Tables de Laver

Les tables précédentes ne sont guère passionnantes. Elles sont plus intéressantes quand nous fixons à l'avance les valeurs dans la première colonne.

Supposons que nous fixions les valeurs suivantes :

	1	2	3		N
1	2				
2	3				
3	4				
.					
.					
.					
.					
N -1	N				
N	1				

Nous allons voir qu'il existe au plus une façon de compléter le tableau. Supposons par exemple $N = 4$. Nous partons avec :

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

Essayons de calculer $4 * 2$, c'est-à-dire $4 * (1 * 1)$. Comme nous voulons avoir la condition d'autodistributivité, il faut avoir $4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1)$.

Or $4 * 1$ est 1, donc on doit avoir $4 * 2 = 1 * 1 = 2$ et notre tableau devient :

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

De même, $4 * 3$: $4 * 3 = 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3$, ce qui donne :

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

Le lecteur pourra établir de même la valeur $4 * 4 = 4$. On passe alors à la ligne de 3. La première valeur à calculer est $3 * 2$, et il vient cette fois $3 * 2 = 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4$. On remplit ainsi la ligne de 3, puis celle de 2 et de 1, parvenant finalement à :

	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

2. LES PREMIÈRES TABLES DE LAVER À 1, 2, 4, 8 et 16 ÉLÉMENTS

Vérifions que les tables de Laver satisfont la loi d'autodistributivité (condition AD) : $p * (q * r) = (p * q) * (p * r)$. Sur le tableau à 4 éléments, choisissons $p = 4$, $q = 3$ et $r = 2$. Le premier membre est égal à $q * r = 3 * 2 = 8$ et $p * (q * r) = p * 8 = 4 * 8 = 8$. Calculons le second membre : $(p * r) = (4 * 2) = 6$; $(p * q) = (4 * 3) = 7$; $(p * q) * (p * r) = 7 * 6 = 8$. L'égalité est vérifiée. Il est facile de programmer la construction des tables de Laver sur un ordinateur, en suivant l'ordre de calcul des valeurs que nous avons indiqué. En utilisant les propriétés de périodicité pour ne pas garder toutes les valeurs en mémoire, on va jusqu'à la table à 1024 éléments sans problème, voire, en opérant avec soin, jusqu'à 2^{20} éléments.

p \ q	1
1	1

p \ q	1	2
1	2	2
1	1	2

p \ q	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

p \ q	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

p \ q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	12	14	16	2	12	14	16	2	12	14	16	2	12	14	16
2	3	12	15	16	3	12	15	16	3	12	15	16	3	12	15	16
3	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	16
4	5	6	7	8	13	14	15	16	5	6	7	8	13	14	15	16
5	6	8	14	16	6	8	14	16	6	8	14	16	6	8	14	16
6	7	8	15	16	7	8	15	16	7	8	15	16	7	8	15	16
7	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	9	10	11	12	13	14	15	16
9	10	12	14	16	10	12	14	16	10	12	14	16	10	12	14	16
10	11	12	15	16	11	12	15	16	11	12	15	16	11	12	15	16
11	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16
12	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16
13	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16
14	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16
15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

3. LES LIMITES DE L'EXPÉRIMENTATION

La période de la première ligne atteint 8 dans la table de Laver à 32 éléments, puis 16 dans la table à 512 éléments. Si le théorème de Laver est vrai, il existe des tables où la période de la première ligne vaut 32, et nous pouvons chercher quelle est la taille N de la première table où cela se produit, par exemple en programmant un ordinateur. Cette approche ne risque pas d'aboutir…

En effet, un théorème de Randall Dougherty, de l'université de Columbus, en Ohio, nous dit que le nombre N est au moins $A_9(A_8(A_8(255)))$, où A_k est la k-ième fonction d'Ackermann. Les fonctions A_k sont des fonctions sur les entiers construites de proche en proche, et qui croissent de plus en plus vite : $A_1(n)$ est $n + 1$, $A_2(n)$ est $2n + 3$, $A_3(n)$ est de l'ordre de 2^n, $A_4(n)$ est approximativement une tour d'exponentielles de base 2 et de hauteur n, et, pour tout k, $A_{\{k+1\}}(n)$ s'obtient en appliquant A_k itérée n fois à 1. Le nombre $A_8(255)$ dépasse toute imagination, et que dire de $A_8(A_8(255))$, puis de $A_9(A_8(A_8(255)))$?

Sans risque d'être démenti, on peut affirmer que, quelle que soit la puissance de l'ordinateur utilisée ou l'astuce du programme développé, on trouvera toujours que la période de la première ligne dans une table de Laver est au plus 16. Pourtant le théorème de Laver nous dit que 32 est atteint, mais certainement bien plus loin que là où les ordinateurs savent encore compter…