

De telles tables existent-elles? Certainement : si nous posons $p * q = q$, c'est-à-dire si nous construisons notre tableau en remplissant la première colonne avec des 1 partout, la deuxième avec des 2, etc., on montre que la condition AD est vérifiée, puisque nous aurons toujours $p * (q * r) = r = (p * q) * (p * r)$.

Or $4 * 1$ est 1, donc on doit avoir $4 * 2 = 1 * 1 = 2$ et notre tableau devient :

	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

La construction est la même pour toutes les tailles de tableau: notre règle du jeu donne à chaque fois une et une seule manière de remplir les cases de la dernière ligne, puis de l'avant-dernière, et ainsi de suite en remontant pour finir par la première ligne. Sont-ce des AD-tables? La construction effectuée garantit un certain nombre des égalités $p * (q * r) = (p * q) * (q * r)$, mais, en fait, seulement celles qui correspondent au cas particulier $r = 1$, car on se ramène toujours au cas précédemment calculé.

Pour les autres nombres du tableau, rien n'est garanti. La situation est alors la suivante: si la taille du tableau est une puissance de 2, alors le tableau que nous avons construit est bien une AD-table, sinon, ce n'en est pas une.

Ainsi, pour chaque entier n , nous avons obtenu une AD-table de taille 2^n , et c'est cette table qui est dénommée la n -ième table de Laver.

En dépit de la simplicité de leur construction, les tables de Laver sont des objets très compliqués et encore mal compris: en particulier, personne ne connaît de formule donnant explicitement la valeur du produit $p * q$ dans la n -ième table de Laver, et il est fort douteux qu'une telle formule existe!

Lignes et périodes

Néanmoins, nous observons certaines propriétés sur les exemples de l'encadré 1 (et sur les exemples supplémentaires que le lecteur aura programmés sur son ordinateur...), qui ont été

démontrées en toute généralité par Richard Laver, et par Ales Drapal, un mathématicien de l'université Charles de Prague.

Nous citerons ici deux propriétés importantes. La première est que chaque table s'obtient simplement à partir des tables plus grandes: par exemple, nous obtiendrons la table à 8 éléments à partir de la table à 16 éléments en gardant le quart supérieur gauche et en «projetant modulo 8» les valeurs, c'est-à-dire en gardant les valeurs entre 1 et 8, et en retranchant 8 aux valeurs entre 9 et 16. La correspondance est la même à chaque niveau: la table à 16 éléments s'obtient à partir de la table à 32 éléments en projetant modulo 16, etc.

La seconde propriété concerne les lignes des tables. Dans la n -ième table (celle qui a 2^n éléments), par hypothèse, la p -ième ligne (en partant du haut) commence par la valeur $p * 1 = p + 1$. Ensuite, le long de la ligne, les valeurs augmentent jusqu'à atteindre la valeur maximale 2^n , à la suite de quoi on retrouve la valeur $p + 1$ et toutes les valeurs précédentes, de façon périodique. Par exemple, dans la table à 8 éléments, les valeurs successives sur la deuxième ligne sont 3, 4, 7, 8, 3, 4, 7, 8: il y a 4 valeurs différentes, et nous dirons que la période de la ligne est 4. Ainsi, dans chaque table de Laver, chaque ligne a une certaine période, dont nous savons qu'elle est elle-même nécessairement une puissance de 2: par exemple, dans la table à 8 éléments, les périodes des lignes 1 à 8 sont, respectivement, 4, 4, 2, 4, 2, 2, 1, et 8.

Le théorème de Laver

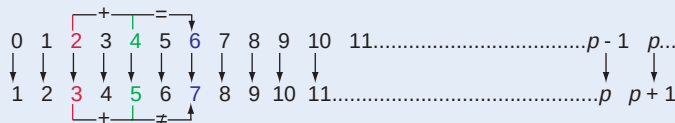
Intéressons-nous spécialement à la période de la première ligne. Nous lisons sur les exemples de l'encadré 2 que les valeurs pour les 5 premières tables sont 1, 1, 2, 4, et 4. Si le lecteur a programmé les tables suivantes, il trouvera ensuite les valeurs 8, 8, 8, 16, et 16 pour les tables à 32, 64, 128, 256, 512 et 1 024 éléments.

Qu'observons-nous? Que ces valeurs vont en croissant, plus exactement en ne décroissant pas. Cela était prévisible, car nous savons que la n -ième table s'obtient en projetant modulo 2^n la $n + 1$ -ième, et s'il y a m valeurs distinctes sur la première ligne de cette $n + 1$ -ième ligne, il y en a au plus m sur la première ligne de la n -ième table.

4. ENSEMBLES HYPERINFINIS ET RANGS AUTOSIMILAIRES

Un ensemble infini est, par définition, un ensemble tellement grand qu'il a des sous-ensembles aussi grands que lui. Par exemple, l'ensemble N des nombres entiers est infini, car la fonction qui envoie chaque entier n sur l'entier $n + 1$ établit une correspondance bijective entre N et le sous-ensemble de N constitué des entiers non nuls.

La théorie moderne des ensembles fait jouer un rôle fondamental à diverses extensions de la notion d'infini mettant en jeu ce qu'on peut appeler des ensembles hyperinfinis (on les dénomme aussi «grands cardinaux»). Un rang autosimilaire est un exemple de tel ensemble. L'idée est de repartir de la définition ci-dessus de l'infini, mais de la renforcer en demandant que la correspondance entre l'ensemble considéré X et l'un de ses sous-ensembles conserve toutes les structures additionnelles existant sur X . Reprenant l'exemple de la correspondance $n \rightarrow n + 1$



entre N et un de ses sous-ensembles, nous voyons que cette correspondance conserve l'ordre des entiers ($p < q$ entraîne bien $p + 1 < q + 1$) ; en revanche, elle ne conserve pas l'addition ($p + q = r$ n'entraîne pas $(p + 1) + (q + 1) = r + 1$...). Les mathématiciens ont montré qu'il n'existe aucune correspondance sur N qui puisse convenir, et donc N , qui est infini, n'est pas hyperinfini au sens précédent. C'est cette notion forte d'infini qu'on dénomme autosimilarité et, donc, N n'est pas autosimilaire.

Pour élaborer de façon convenable une théorie des ensembles autosimilaires (s'il en existe), le contexte de la théorie des ensembles suggère d'utiliser des ensembles d'un type particulier appelés rangs. L'existence d'un rang autosimilaire est l'un des axiomes d'hyperinfini que la théorie des ensembles étudie depuis les années 1970. Le lien avec les tables de Laver vient du fait qu'on peut construire à partir d'un rang autosimilaire une certaine opération AD (dont les tables de Laver sont des projections finies) : c'est ainsi que Laver a, pour la première fois, introduit les tables qui, aujourd'hui, portent son nom.

