

La construction est la même pour toutes les tailles de tableau: notre règle du jeu donne à chaque fois une et une seule manière de remplir les cases de la dernière ligne, puis de l'avant-dernière, et ainsi de suite en remontant pour finir par la première ligne. Sont-ce des AD-tables? La construction effectuée garantit un certain nombre des égalités $p * (q * r) = (p * q) * (q * r)$, mais, en fait, seulement celles qui correspondent au cas particulier $r = 1$, car on se ramène toujours au cas précédemment calculé.

Pour les autres nombres du tableau, rien n'est garanti. La situation est alors la suivante: si la taille du tableau est une puissance de 2, alors le tableau que nous avons construit est bien une AD-table, sinon, ce n'en est pas une.

Ainsi, pour chaque entier n , nous avons obtenu une AD-table de taille 2^n , et c'est cette table qui est dénommée la n -ième table de Laver.

En dépit de la simplicité de leur construction, les tables de Laver sont des objets très compliqués et encore mal compris: en particulier, personne ne connaît de formule donnant explicitement la valeur du produit $p * q$ dans la n -ième table de Laver, et il est fort douteux qu'une telle formule existe!

Lignes et périodes

Néanmoins, nous observons certaines propriétés sur les exemples de l'encadré 1 (et sur les exemples supplémentaires que le lecteur aura programmés sur son ordinateur...), qui ont été

démontrées en toute généralité par Richard Laver, et par Ales Drapal, un mathématicien de l'université Charles de Prague.

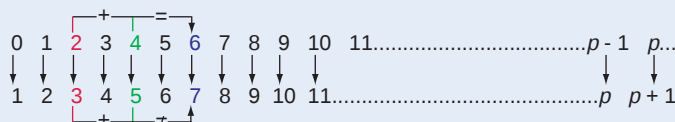
Nous citerons ici deux propriétés importantes. La première est que chaque table s'obtient simplement à partir des tables plus grandes: par exemple, nous obtiendrons la table à 8 éléments à partir de la table à 16 éléments en gardant le quart supérieur gauche et en «projetant modulo 8» les valeurs, c'est-à-dire en gardant les valeurs entre 1 et 8, et en retranchant 8 aux valeurs entre 9 et 16. La correspondance est la même à chaque niveau: la table à 16 éléments s'obtient à partir de la table à 32 éléments en projetant modulo 16, etc.

La seconde propriété concerne les lignes des tables. Dans la n -ième table (celle qui a 2^n éléments), par hypothèse, la p -ième ligne (en partant du haut) commence par la valeur $p * 1 = p + 1$. Ensuite, le long de la ligne, les valeurs augmentent jusqu'à atteindre la valeur maximale 2^n , à la suite de quoi on retrouve la valeur $p + 1$ et toutes les valeurs précédentes, de façon périodique. Par exemple, dans la table à 8 éléments, les valeurs successives sur la deuxième ligne sont 3, 4, 7, 8, 3, 4, 7, 8: il y a 4 valeurs différentes, et nous dirons que la période de la ligne est 4. Ainsi, dans chaque table de Laver, chaque ligne a une certaine période, dont nous savons qu'elle est elle-même nécessairement une puissance de 2: par exemple, dans la table à 8 éléments, les périodes des lignes 1 à 8 sont, respectivement, 4, 4, 2, 4, 2, 2, 1, et 8.

4. ENSEMBLES HYPERINFINIS ET RANGS AUTOSIMILAIRES

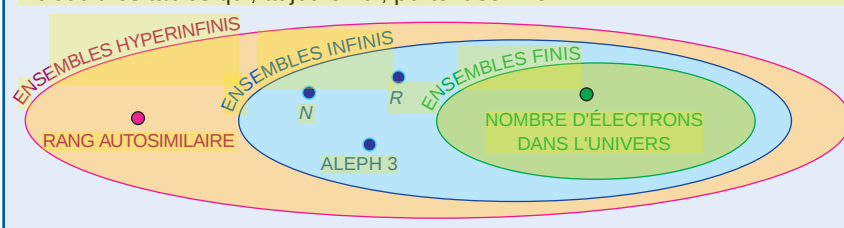
Un ensemble infini est, par définition, un ensemble tellement grand qu'il a des sous-ensembles aussi grands que lui. Par exemple, l'ensemble N des nombres entiers est infini, car la fonction qui envoie chaque entier n sur l'entier $n + 1$ établit une correspondance bijective entre N et le sous-ensemble de N constitué des entiers non nuls.

La théorie moderne des ensembles fait jouer un rôle fondamental à diverses extensions de la notion d'infini mettant en jeu ce qu'on peut appeler des ensembles hyperinfinis (on les dénomme aussi «grands cardinaux»). Un rang autosimilaire est un exemple de tel ensemble. L'idée est de repartir de la définition ci-dessus de l'infini, mais de la renforcer en demandant que la correspondance entre l'ensemble considéré X et l'un de ses sous-ensembles conserve toutes les structures additionnelles existant sur X . Reprenant l'exemple de la correspondance $n \rightarrow n + 1$



entre N et un de ses sous-ensembles, nous voyons que cette correspondance conserve l'ordre des entiers ($p < q$ entraîne bien $p + 1 < q + 1$) ; en revanche, elle ne conserve pas l'addition ($p + q = r$ n'entraîne pas $(p + 1) + (q + 1) = r + 1$...). Les mathématiciens ont montré qu'il n'existe aucune correspondance sur N qui puisse convenir, et donc N , qui est infini, n'est pas hyperinfini au sens précédent. C'est cette notion forte d'infini qu'on dénomme autosimilarité et, donc, N n'est pas autosimilaire.

Pour élaborer de façon convenable une théorie des ensembles autosimilaires (s'il en existe), le contexte de la théorie des ensembles suggère d'utiliser des ensembles d'un type particulier appelés rangs. L'existence d'un rang autosimilaire est l'un des axiomes d'hyperinfini que la théorie des ensembles étudie depuis les années 1970. Le lien avec les tables de Laver vient du fait qu'on peut construire à partir d'un rang autosimilaire une certaine opération AD (dont les tables de Laver sont des projections finies) : c'est ainsi que Laver a, pour la première fois, introduit les tables qui, aujourd'hui, portent son nom.



Le théorème de Laver

Intéressons-nous spécialement à la période de la première ligne. Nous lisons sur les exemples de l'encadré 2 que les valeurs pour les 5 premières tables sont 1, 1, 2, 4, et 4. Si le lecteur a programmé les tables suivantes, il trouvera ensuite les valeurs 8, 8, 8, 8, 16, et 16 pour les tables à 32, 64, 128, 256, 512 et 1 024 éléments.

Qu'observons-nous? Que ces valeurs vont en croissant, plus exactement en ne décroissant pas. Cela était prévisible, car nous savons que la n -ième table s'obtient en projetant modulo 2^n la $n + 1$ -ième, et s'il y a m valeurs distinctes sur la première ligne de cette $n + 1$ -ième ligne, il y en a au plus m sur la première ligne de la n -ième table.

Nous voyons aussi que les périodes doublent parfois. Sans qu'une loi apparaisse clairement sur un aussi petit nombre de valeurs, il apparaît plausible que la suite des périodes tende vers l'infini, c'est-à-dire atteigne successivement toutes les puissances de 2 (il est facile de voir que les périodes ne peuvent faire plus que doubler d'une table à la suivante, donc on ne peut sauter aucune puissance de 2). Qu'en est-il?

En 1995, Richard Laver a prouvé le théorème suivant : «S'il existe un rang autosimilaire, alors la suite des périodes des premières lignes des tables de Laver tend vers l'infini.»

L'encadré 4 explique la notion de rang autosimilaire. Ce résultat est très étonnant : que la suite des périodes tende vers l'infini ne nous surprend guère, c'est ce que l'observation des exemples suggérerait. Ce qui est surprenant ici est l'hypothèse avec laquelle Laver démontre son résultat, à savoir cette mystérieuse existence d'un rang autosimilaire. Cette hypothèse d'un rang autosimilaire exprime qu'il existe dans le monde mathématique des ensembles énormes, «hyperinfinis».

D'après le théorème d'incomplétude de Gödel, il n'existe aucun espoir de montrer que de tels ensembles existent, ni même de montrer que l'hypothèse qu'ils existent est non contradictoire. Ce qui est extrêmement surprenant alors, c'est l'apparition d'un lien entre les tables de Laver, qui sont des objets finis, calculables par ordinateur, et qui existent donc au sens le plus concret, et des ensembles hyperinfinis dont personne ne sait, ni ne saura jamais, s'ils existent.

Une alternative

La situation actuelle ne traduit que notre ignorance des propriétés des tables de Laver. Deux issues sont possibles :

- soit quelqu'un finit par trouver une "vraie" démonstration du théorème de Laver, c'est-à-dire une démonstration qui n'utilise pas l'existence d'un ensemble hyperinfini,
- soit on finit par démontrer que toute preuve utilise comme hypothèse cette existence de façon incontournable.

Si la seconde issue est la bonne, la situation serait comparable à celle du

théorème de Goodstein, une propriété des entiers dont on sait qu'on ne peut pas la démontrer sans une certaine forme d'infini (voir *L'infini est-il nécessaire*, page 102) ; une distinction importante néanmoins est que l'hypothèse utilisée dans la preuve du théorème de Goodstein est l'existence d'un infini minimal, alors que celle utilisée dans la preuve du théorème de Laver est l'existence d'un infini extraordinairement plus grand.

En théorie, rien n'empêche que cette issue soit la bonne (c'est même l'espoir de beaucoup de théoriciens des ensembles et de spécialistes de l'infini). Il semble cependant que la première issue ait bien davantage de chances d'être la bonne, même si les efforts pour démontrer «à la main» le théorème de Laver ont été jusqu'à présent infructueux ou, plus exactement, incomplets.

Applications de l'infini?

Dans la situation actuelle, le théorème de Laver est une application de la notion d'infini, puisque la seule démonstration que nous en connaissons y fait