

Nous voyons aussi que les périodes doublent parfois. Sans qu'une loi apparaisse clairement sur un aussi petit nombre de valeurs, il apparaît plausible que la suite des périodes tende vers l'infini, c'est-à-dire atteigne successivement toutes les puissances de 2 (il est facile de voir que les périodes ne peuvent faire plus que doubler d'une table à la suivante, donc on ne peut sauter aucune puissance de 2). Qu'en est-il?

En 1995, Richard Laver a prouvé le théorème suivant : «S'il existe un rang autosimilaire, alors la suite des périodes des premières lignes des tables de Laver tend vers l'infini.»

L'encadré 4 explique la notion de rang autosimilaire. Ce résultat est très étonnant : que la suite des périodes tende vers l'infini ne nous surprend guère, c'est ce que l'observation des exemples suggérait. Ce qui est surprenant ici est l'hypothèse avec laquelle Laver démontre son résultat, à savoir cette mystérieuse existence d'un rang autosimilaire. Cette hypothèse d'un rang autosimilaire exprime qu'il existe dans le monde mathématique des ensembles énormes, «hyperinfinis».

D'après le théorème d'incomplétude de Gödel, il n'existe aucun espoir de montrer que de tels ensembles existent, ni même de montrer que l'hypothèse qu'ils existent est non contradictoire. Ce qui est extrêmement surprenant alors, c'est l'apparition d'un lien entre les tables de Laver, qui sont des objets finis, calculables par ordinateur, et qui existent donc au sens le plus concret, et des ensembles hyperinfinis dont personne ne sait, ni ne saura jamais, s'ils existent.

Une alternative

La situation actuelle ne traduit que notre ignorance des propriétés des tables de Laver. Deux issues sont possibles :

- soit quelqu'un finit par trouver une "vraie" démonstration du théorème de Laver, c'est-à-dire une démonstration qui n'utilise pas l'existence d'un ensemble hyperinfini,
- soit on finit par démontrer que toute preuve utilise comme hypothèse cette existence de façon incontournable.

Si la seconde issue est la bonne, la situation serait comparable à celle du

théorème de Goodstein, une propriété des entiers dont on sait qu'on ne peut pas la démontrer sans une certaine forme d'infini (voir *L'infini est-il nécessaire*, page 102) ; une distinction importante néanmoins est que l'hypothèse utilisée dans la preuve du théorème de Goodstein est l'existence d'un infini minimal, alors que celle utilisée dans la preuve du théorème de Laver est l'existence d'un infini extraordinairement plus grand.

En théorie, rien n'empêche que cette issue soit la bonne (c'est même l'espoir de beaucoup de théoriciens des ensembles et de spécialistes de l'infini). Il semble cependant que la première issue ait bien davantage de chances d'être la bonne, même si les efforts pour démontrer «à la main» le théorème de Laver ont été jusqu'à présent infructueux ou, plus exactement, incomplets.

Applications de l'infini?

Dans la situation actuelle, le théorème de Laver est une application de la notion d'infini, puisque la seule démonstration que nous en connaissons y fait