

Nous voyons aussi que les périodes doublent parfois. Sans qu'une loi apparaisse clairement sur un aussi petit nombre de valeurs, il apparaît plausible que la suite des périodes tende vers l'infini, c'est-à-dire atteigne successivement toutes les puissances de 2 (il est facile de voir que les périodes ne peuvent faire plus que doubler d'une table à la suivante, donc on ne peut sauter aucune puissance de 2). Qu'en est-il?

En 1995, Richard Laver a prouvé le théorème suivant : «S'il existe un rang autosimilaire, alors la suite des périodes des premières lignes des tables de Laver tend vers l'infini.»

L'encadré 4 explique la notion de rang autosimilaire. Ce résultat est très étonnant : que la suite des périodes tende vers l'infini ne nous surprend guère, c'est ce que l'observation des exemples suggérait. Ce qui est surprenant ici est l'hypothèse avec laquelle Laver démontre son résultat, à savoir cette mystérieuse existence d'un rang autosimilaire. Cette hypothèse d'un rang autosimilaire exprime qu'il existe dans le monde mathématique des ensembles énormes, «hyperinfinis».

D'après le théorème d'incomplétude de Gödel, il n'existe aucun espoir de montrer que de tels ensembles existent, ni même de montrer que l'hypothèse qu'ils existent est non contradictoire. Ce qui est extrêmement surprenant alors, c'est l'apparition d'un lien entre les tables de Laver, qui sont des objets finis, calculables par ordinateur, et qui existent donc au sens le plus concret, et des ensembles hyperinfinis dont personne ne sait, ni ne saura jamais, s'ils existent.

Une alternative

La situation actuelle ne traduit que notre ignorance des propriétés des tables de Laver. Deux issues sont possibles :

- soit quelqu'un finit par trouver une "vraie" démonstration du théorème de Laver, c'est-à-dire une démonstration qui n'utilise pas l'existence d'un ensemble hyperinfini,
- soit on finit par démontrer que toute preuve utilise comme hypothèse cette existence de façon incontournable.

Si la seconde issue est la bonne, la situation serait comparable à celle du

théorème de Goodstein, une propriété des entiers dont on sait qu'on ne peut pas la démontrer sans une certaine forme d'infini (voir *L'infini est-il nécessaire*, page 102) ; une distinction importante néanmoins est que l'hypothèse utilisée dans la preuve du théorème de Goodstein est l'existence d'un infini minimal, alors que celle utilisée dans la preuve du théorème de Laver est l'existence d'un infini extraordinairement plus grand.

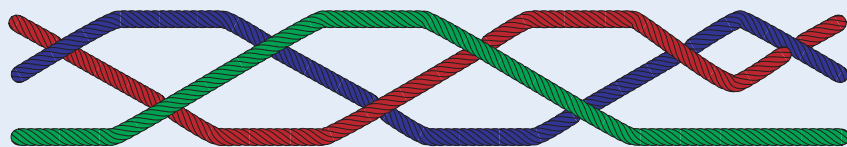
En théorie, rien n'empêche que cette issue soit la bonne (c'est même l'espoir de beaucoup de théoriciens des ensembles et de spécialistes de l'infini). Il semble cependant que la première issue ait bien davantage de chances d'être la bonne, même si les efforts pour démontrer «à la main» le théorème de Laver ont été jusqu'à présent infructueux ou, plus exactement, incomplets.

Applications de l'infini?

Dans la situation actuelle, le théorème de Laver est une application de la notion d'infini, puisque la seule démonstration que nous en connaissons y fait

5. L'ORDRE DES TRESSSES

L'existence des tables de Laver et le théorème sur les périodes ne sont pas les seules applications de l'existence d'un rang autosimilaire. Une autre application a été la découverte de l'ordre des tresses. Les tresses mathématiques sont des diagrammes avec des brins qui se croisent, sur le modèle suivant :



Les tresses jouent un rôle important, car elles apparaissent dans de nombreuses branches des mathématiques et de la physique, en liaison notamment avec la théorie des nœuds et, de là, avec une grande variété de problèmes en physique, en chimie ou en biologie (voir *La science des nœuds*, Dossier hors série *Pour la Science*, avril 1997). On a également proposé récemment plusieurs applications à la cryptographie.

En 1992, un ordre remarquable sur les tresses a été découvert. Il a permis notamment de construire un nouvel algorithme de comparaison de tresses plus rapide que tout ce qui était connu auparavant.

Ce qui nous intéresse ici est la façon dont a été découvert cet ordre. Le point de départ est l'étude des rangs autosimilaires par Laver à la fin des années 1980 : comme mentionné dans l'encadré 4, cette étude amène naturellement à une certaine AD-table, et Laver, en 1989, a montré que cette table est sans cycle, ce qui signifie qu'on ne peut pas y trouver des éléments $x_1, \dots, x_n$ tels que chaque x_i apparaît dans la ligne de x_{i+1} et x_1 apparaît dans la ligne de x_n . Or on savait à l'époque que l'existence d'une seule opération AD sans cycle était importante pour l'étude de la condition AD en général, tout en n'ayant aucune raison de penser qu'un tel objet doive exister. Le théorème de Laver ne montrait pas vraiment cette existence, puisqu'il supposait lui-même l'existence indémontrable d'un ensemble hyperinfini, mais, au moins, il montrait qu'elle était plausible, et, du coup, suggérait qu'une construction directe devait être possible. Cette indication a été confirmée, et, de surcroît, elle a mené à des applications insoupçonnées : c'est la construction, sans l'aide d'un ensemble hyperinfini d'une opération AD sans cycle, qui a naturellement amené à considérer des tresses et à les ordonner d'une façon que personne n'avait imaginée auparavant. Ainsi, il n'y a aucun lien direct entre les tresses et les ensembles hyperinfinis, si ce n'est que les premières ont été utilisées pour remplacer les seconds. Il n'empêche que, sans les ensembles hyperinfinis, nous en saurions aujourd'hui moins sur les tresses.

appel. S'il apparaît un jour une nouvelle démonstration qui ne l'utilise plus, le théorème cessera-t-il pour autant d'être une application ? En un sens strict, peut-être, puisque ni l'énoncé ni la nouvelle preuve n'utiliseront l'infini.

Mais, en fait, il me semble qu'il s'agira toujours d'applications : quoi qu'il arrive, c'est l'utilisation de l'infini qui aura permis de découvrir le théorème, et il est plus que probable que personne n'aurait eu ni l'occasion ni la curiosité d'en chercher une démonstration si l'étude des rangs autosimilaires n'avait pas d'abord fourni un argument décisif, même fondé sur un principe indémontrable. C'est déjà ce qui s'est passé, il y a quelques années, avec l'ordre des tresses (voir l'encadré 5), et aussi avec

les tables de Laver elles-mêmes, d'abord déduites de l'existence d'un rang autosimilaire, puis, ensuite, reconstruites à la main en suivant la méthode que nous avons décrite ici.

Il est tentant de comparer ici la contribution de la théorie des ensembles hyperinfinis avec celle de la physique : se fondant sur des intuitions venues des modèles concrets, les physiciens proposent fréquemment des formules sans les démontrer rigoureusement ou, plutôt, en en donnant une première justification qui néglige des problèmes tels que divergence d'intégrales ou de séries (penser, par exemple, aux intégrales de Feynman). Il appartient alors aux mathématiciens de trouver d'autres démonstrations, complètes et rigoureuses. La situation est semblable lorsque des

ensembles hyperinfinis permettent de deviner et de justifier des propriétés comme l'existence des tables de Laver ou le théorème sur les périodes : comme précédemment, il reste ensuite à trouver d'autres démonstrations, libérées des hypothèses indémontrables.

Dans les deux cas, les contributions de la physique et de l'hyperinfini sont essentielles, car, sans elles, les propriétés n'auraient probablement pas été imaginées. Ces applications de l'infini sont d'un type nouveau en mathématiques : l'infini y sert de révélateur pour deviner des propriétés nouvelles, avant de disparaître ultérieurement lorsque sont trouvées les « bonnes » démonstrations.

L'existence de telles applications est un argument puissant en faveur de l'étude de l'infini (et de la théorie des ensembles) : elle montre que, même si l'on est tenté par une approche strictement constructiviste des mathématiques (voir l'article d'Allan Calder dans ce numéro) ou simplement si l'on ressent la plus grande méfiance et fort peu d'intérêt pour les ensembles infinis, et, *a fortiori*, hyperinfinis, on doit reconnaître à ces derniers la capacité de mener à la découverte de nouvelles propriétés des objets finis.

Notons que, de ce point de vue, il importe peu que l'existence des ensembles infinis considérés soit plus ou moins plausible, puisque ceux-ci ont vocation à disparaître du paysage final : on peut même s'attendre à ce que les objets les plus puissants en termes d'applications soient les moins plausibles, comme ces étranges rangs autosimilaires et autres ensembles hyperinfinis que nous avons rencontrés dans cet article et qui se sont déjà révélés fructueux.

Patrick DEHORNOY est professeur de mathématiques à l'université de Caen.

P. DEHORNOY, *Braids and self-distributivity*, Progress in Math., vol. 192, Birkhäuser, 2000.

J.-P. DELAHAYE, *Les grands cardinaux*, in *Pour la science*, n° 224, pp. 60-67, juin 1996.

R. DOUGHERTY, *Critical points in an algebra of elementary embeddings*, in *Ann. P. Appl. Logic*, n° 65, pp. 211-241, 1993.

C. KASSEL, *L'ordre de Dehornoy sur les tresses*, Séminaire Bourbaki, exposé 865, novembre 1999.

R. LAVER, *On the algebra of elementary embeddings of a rank into itself*, in *Advances in Math.*, n° 110, pp. 334-346, 1995.

L'infini littéraire

PAUL BRAFFORT

Dans le sillage des philosophes, romanciers, poètes et essayistes ont été inspirés par l'infini.

*Voir un Monde dans un Grain de Sable
Et un Ciel dans une Fleur Sauvage,
Tenir l'Infini dans la paume de la main
Et l'Éternité dans une heure.*

William Blake
(*Augures d'innocence* – 1803)

L'un, fini (la mathématique, la science), n'en finit pourtant pas : si la science veut décrire – voire expliquer – le monde, elle n'en saisit jamais qu'un infime fragment, et tout le reste... est littérature !

L'idée même de l'«infini» apparaît, dans le monde grec, au sein d'une culture qui ne s'est pas encore fragmentée. L'infini est donc littéraire et philosophique – voire linguistique – avant d'être mathématique (Platon et Aristote n'utilisent d'ailleurs pas le même mot pour le désigner). Et comme Paul Valéry, un écrivain qui, plus que tout autre, s'efforcera d'abolir les frontières au sein de la culture, l'observe en 1910 : «Il y a en nous une sensation finie de l'«infini.» Et ce n'est qu'un effet – une conséquence. Ce n'est pas une preuve de quoi que ce soit.» Avec Victor Hugo, Valéry sera ici notre guide.

Dès l'Antiquité, une dualité se dessine dans la problématique de l'infini : celle de l'arithmétique et du géométrique (du discret – dénombrable – et du continu). Une autre s'y ajoute au sein même du continu : celle de l'espace et du temps. Toutes intéressent et inspirent Valéry, comme elles ont intéressé Lucrèce, Bruno, Pascal, Goethe, Novalis, Hugo et intéresseront Aragon, Borges, Sinisgalli, Nabokov, entre autres. Ces dualités nous permettent de dessiner, dans le foisonnement littéraire, une certaine organisation de l'infini qui reprend la distinction traditionnelle entre les domaines de l'«extension» et de la «compréhension», mais doit tenir compte explicitement du contenu «privatif» qu'exprime le *in finini*.

L'angoisse de Pascal – sur laquelle Valéry et Borges reviendront longuement –, c'est aussi l'*Horror Vacui* (l'horreur du vide) de Sinisgalli (1945). Et cette angoisse se retrouve, comme le complément d'un ensemble, dans cette sensation de trop-plein qui parfois nous assaille, submergés souvent dans le déluge des signes, étouffés dans l'imbrication des réseaux, dans l'incendie des artifices. Il nous faudrait sans doute un nouvel Edgar Poe et un nouvel Eurêka (ou peut-être suffit-il d'observer, avec Irénée-Louis Sandomir, que «la 'Pataphysique contient tous les infinis»)...

La défense de l'infini

*Quelqu'un va-t-il prendre enfin
la défense de l'infini ?*
Aragon
(*Paris-Journal*, 13 avril 1923)

«L'infini se présente également, en arithmétique et en algèbre, comme un symbole d'impossibilité, comme une solution absurde et fausse...», observe le logicien Louis Couturat dans *De l'infini mathématique* (1896), et si, la même année, Valéry déclare, avec Teste : «J'ai mon *Infini*», il notera, dans ses *Cahiers*, en 1944 : «Les infinis sont des abus de langage et d'écriture, des développements fiduciaires sans garantie.» Borges avait dit aussi, en 1939, dans *Les avatars de la tortue* : «Il est un concept qui corrompt et dérègle tous les autres. Je ne parle pas du Mal, dont l'empire est circonscrit à l'éthique ; je parle de l'infini.»

Victor Hugo avait donné de ce sentiment de malaise une analyse quasi lexicale dans ses notes de travail de *William Shakespeare* (1864) : «Il semble que l'irrégulier, c'est l'inachevé, et que, dans l'inachevé, il y a de l'infini.» Il s'agit là d'une des nombreuses attestations de l'intérêt que porte Hugo à

un débat qui n'a cessé, depuis les éléates et les pères de l'Église, et que Louis Couturat met en scène, dans le livre III (*La critique de l'Infini*) de son traité, sous la forme d'un dialogue «à la Galilée» entre «Le Finitiste» et «L'Infiniste». Et si, en 1923, Aragon se propose de prendre *La défense de l'infini*, il préférera détruire, en 1927, le manuscrit de l'ouvrage qu'il projetait : le logicien et le mathématicien sont désormais à l'œuvre, aux côtés du philosophe et du poète.

Dès le prologue de son grand traité en cours de publication, *La totalité* (la section III.2 du volume I, livre IV, s'intitule d'ailleurs *Totalité et Infini*), le philosophe Christian Godin s'exclame : «Tout conspirait chez Leibniz. Tout expire chez la plupart des contemporains. Déconstruction, dissémination, déterritorialisation, différence, tout un courant de pensée contemporain travaille sur ces syllabes *dé-*, *dis-*, qui sont devenues, en remplacement des *con-* et *sym-* classiques, les préfixes fétiches de la modernité.»

Le préfixe *in* est celui d'*infini*, mais aussi d'*inachèvement*, d'*incertitude*, d'*impossibilité*. L'expression littéraire la plus remarquable en est due à l'écrivain, peintre et philosophe polonais S. I. Witkiewicz, auteur d'*Inassouvissement* (1930), roman où est évoquée la théorie des types de Russell (remède contre les paradoxes), dont une version simplifiée fut imaginée par son ami le logicien, peintre et écrivain Léon Chwistek. Le thème de l'inassouvissement est ainsi directement lié à celui de l'infini !

Et c'est un mathématicien devenu peintre, poète et publiciste, Leonardo Sinisgalli, qui nous propose une version lyrique de ces effrois et de ces émerveillements, dans *Horror Vacui* où l'on peut lire, dans le treizième fragment : «DÉCIMALES INFINIES – Qui a écrit que les nombres décimaux infinis donnent le sentiment d'une prolifération, d'un monstrueux travail de la nature, de

quelque chose qui rappelle les dynasties millénaires des Pontifes, des Empereurs, des Rois, des Princes ? Avec cette répétition périodique et cette succession chaotique des mêmes neuf chiffres, qui ne pense aux Ramsès, aux Innocents, aux Sixtes, aux Alexandre, aux Georges ? Quelque chose qui rappelle les vers de l'intestin, les bandelettes, les chaînes, des anneaux attachés à un billot, à une tête, à un nombre entier.»

Dans *Une vague de rêves* (1924), Aragon, lui, avait choisi d'accueillir courtoisement le monstre : «Qui est là ? Ah très bien : faites entrer l'infini.»

Escales dans l'infini

La hiérarchie absolue de l'infini nous est inconnue. Il n'y a pas d'autre hiérarchie que la gravitation pour les corps et le rayonnement pour les esprits. Les deux phénomènes, qui se corrigent l'un par l'autre, sont en équilibre dans l'homme.

Victor Hugo

(William Shakespeare, *Notes de travail : l'infini dans l'art*, 1864)

Le premier infini qu'écrivains et mathématiciens s'efforcent de décrire est l'infini dénombrable, le plus proche de notre intuition, semble-t-il. Mais le logicien L. E. J. Brouwer, dans *Art, Life and Mysticism*, dès 1908, est réticent : «Dans la science tout ce qui est perçu est placé en dehors du Soi, dans un univers de perception indépendant du Soi ; son lien avec le Soi, son unique source et guide, est perdu. Cela construit alors un substratum logico-mathématique qui est complètement étranger à la vie, une illusion, et qui agit dans la vie comme une Tour de Babel avec sa confusion des langues.»

Tour de Babel, paradoxe de Zénon, autant de thèmes qui inspireront Valéry, Borges et Calvino : on n'a pas oublié la vingt-et-unième strophe du *Cimetière marin* : «Zénon ! Cruel Zénon ! Zénon d'Élée ! / M'as-tu percé de cette flèche ailée / ...». John Irwin consacre un chapitre entier du livre qu'il publie en 1994 au fameux paradoxe vu par Borges, dans *La mort et la boussole* (1942) et *L'aleph* (1945). Calvino en fera le thème de *Temps zéro* (1966), la nouvelle la plus réussie de l'ouvrage éponyme. L'année suivante, dans *Cybernétique et fantasmes*, il précise : «Je pourrais ajouter que la numérabilité, la finitude sont en train de triompher de l'indétermination des concepts qui ne peuvent pas être soumis aux mesures et aux délimita-

tions ; mais cette formulation risquerait de donner une idée un peu simpliste des choses alors que la situation réelle est exactement contraire : tout processus analytique, toute division en parties tend à donner du monde une image qui va se complexifiant, juste comme, en refusant un espace continu, Zénon d'Élée finissait par concevoir entre Achille et la tortue une subdivision infinie de points intermédiaires.»

Au paradoxe ancien de Zénon s'étaient ajoutées, au début du siècle, d'autres antinomies qui mettaient en cause la notion d'ensemble – et même le fonctionnement de notre langage : celles de Russell, de Richard, de Grelling, etc. Henri Poincaré s'exclamait alors, dans *La logique de l'infini* (1909) : «Est-il possible de raisonner sur des objets qui ne peuvent être définis en un nombre fini de mots ? Est-il possible même d'en parler en sachant de quoi l'on parle, et en prononçant autre chose

que des paroles vides ? Ou au contraire doit-on les regarder comme impensables ? Quant à moi je n'hésite pas à répondre que ce sont de purs néants.» Valéry ne s'exprimait pas autrement : «Le résultat des arguments de Zénon, c'est la démonstration d'une confusion dans le langage» (1917), tout comme Sinigalli qui, dans *Le Devin* (1944), fait dialoguer ainsi ses personnages :

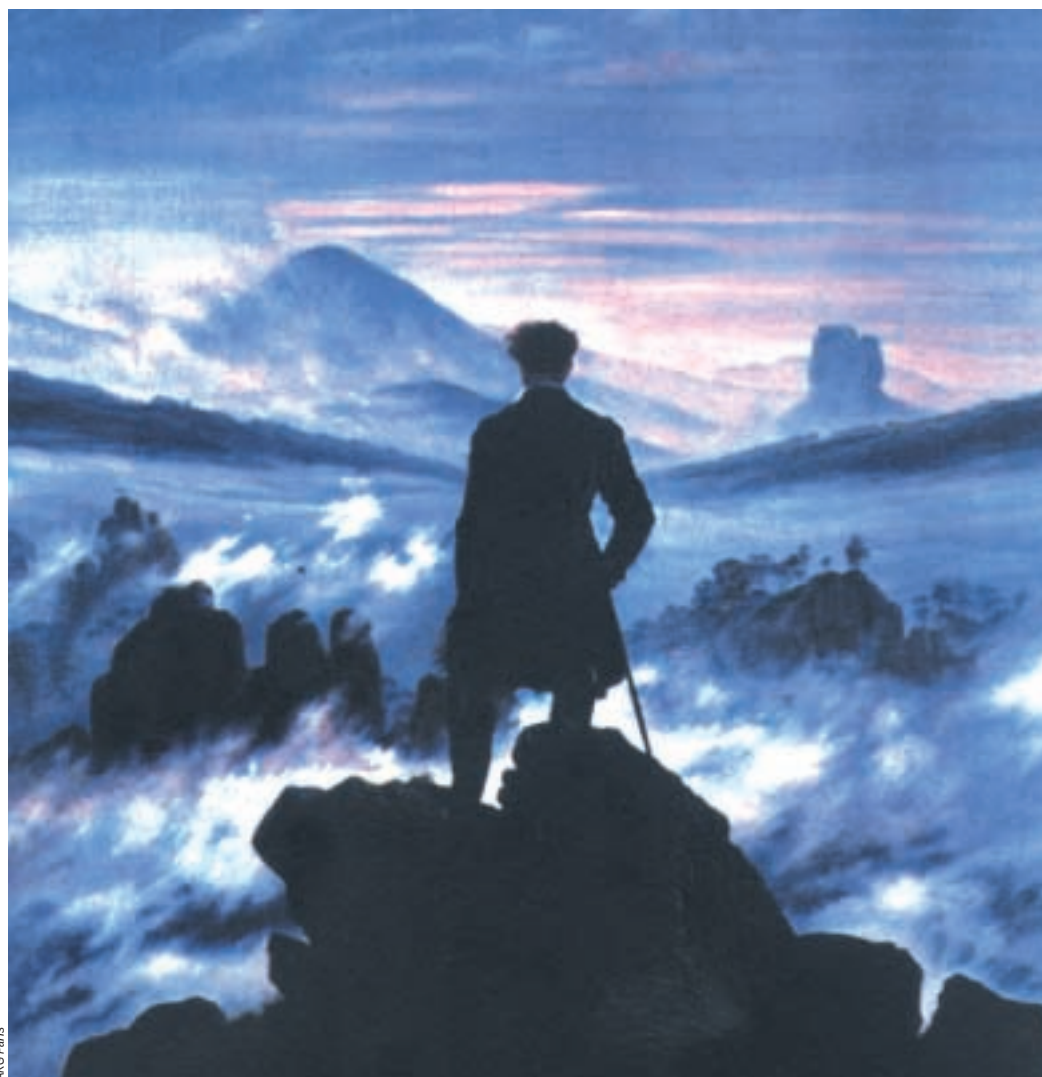
Le Roi : *Ce sont des signes ou des choses ?*

Le Devin : *Ce sont des mots, Sire.*

La Clôture

Leur pouvoir suggestif ne dépend pas tant d'un signifiant caché ou latent que la lecture doit mettre au jour, il utilise plutôt toutes les ressources du signifiant et de la structure afin de poser un droit au sens multiple et, ainsi, de libérer la lecture à l'infini.

David Banonk
(*La lecture infinie*)



1. LE PROMENEUR SUR LA MER DE NUAGES, de Caspar David Friedrich (1818) évoque cet infini qui a inspiré de nombreux écrivains et poètes.