

Les mathématiques, science de l'infini

JAVIER DE LORENZO MARTÍNEZ

L'infini, sous ses aspects potentiel et actuel, semble assurer une fonction régulatrice dans la formalisation mathématique.



Faites l'expérience. Déclenchez la trotteuse de votre montre au début d'un exposé de mathématiques : il ne s'écoulera pas cinq minutes avant que l'orateur prononce le mot infini. Cette omniprésence de l'infini en mathématiques est étonnante car l'homme est un être fini, limité, embarqué sur un vaisseau, la Terre, limité et fini. Pourtant cet être fini examine l'infini et (s')en joue, au point que l'infini lui est indispensable pour appréhender le fini.

L'étude de l'infini est l'apanage du mathématicien, dont le travail consiste, pour l'essentiel, à répéter, comparer, ordonner et classer. L'itération et la comparaison conduisent à deux infinis différents, l'infini potentiel et l'infini actuel.

L'infini potentiel

Le marcheur, dans la succession de ses pas – un pas, puis un autre et encore un autre – saisit que sa (dé)marche peut se répéter indéfiniment. En principe, il peut toujours faire «un pas de plus» dès lors qu'il vient d'en faire un. Cette répétition sans limitation conduit à l'intuition première d'un indéfini sans fin, l'infini potentiel ; il y a toujours un (dé)pas (sement) possible. L'infini potentiel, la faculté d'aller «un peu plus loin», est ainsi lié à la notion de successeur d'un entier naturel. À un nombre succède

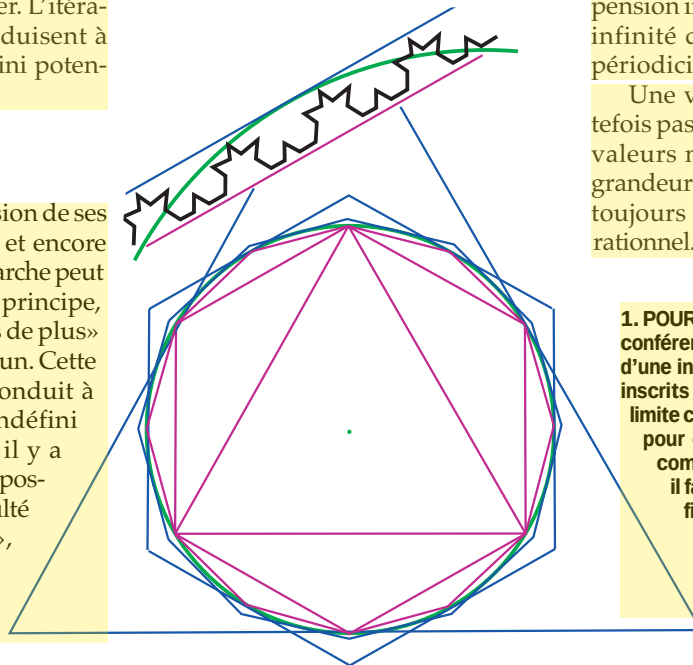
toujours un autre nombre et il n'en existe pas de dernier, car ce dernier nombre... a un successeur.

Les entiers permettent d'énumérer, c'est-à-dire de savoir combien de pas ont été faits. En comptant ou en mesurant, on associe une valeur numérique à une grandeur spatiale ou à une quantité. On compte les brebis d'un troupeau, les grains de sable du désert ou la longueur d'un bâton. Souvent ce décompte utilise implicitement un principe dit archimédien qui, comme nous le verrons, autorise les comparaisons : quelles que soient les valeurs

numériques x, y telles que x est inférieur à y , il existe un entier naturel n tel que nx est plus grand que y .

Pour comparer deux grandeurs de même nature, l'une étant prise comme unité de référence, il est pratique de leur associer un nombre. Le rapport de ces deux valeurs numériques associées pourra être entier, mais sera plus souvent rationnel, c'est-à-dire une fraction comme un huitième, un cinquième, etc. Dans cette comparaison, on opère une division où tout nombre est exprimable sous forme décimale. Ainsi, on écrit $9/10 = 0,9$; $1/3 = 0,333...$, où les points de suspension indiquent que l'écriture a une infinité de chiffres où apparaît une périodicité de certains blocs.

Une valeur numérique n'est toutefois pas toujours le quotient de deux valeurs numériques associées à des grandeurs, c'est-à-dire qu'elle n'est pas toujours représentée par un nombre rationnel. Un nombre irrationnel s'écrit



1. POUR CALCULER π , la longueur de la circonférence, Archimède considère la limite d'une infinité de polygones circonscrits et inscrits dans le cercle et calcule la valeur limite comprise entre ces polygones. Ainsi, pour calculer une longueur finie, mais comportant une infinité de décimales, il faut utiliser un processus infini. L'infini est cependant plein de pièges : même dans ce cas simple, on peut construire des fonctions de type fractal, de longueur infinie, qui restent comprises entre les polygones.

lui aussi, en base dix, avec une infinité de chiffres après la virgule, mais, à la différence du rationnel, ne présente pas de périodicité. Ainsi, dans le nombre $p = 3,14159\dots$ il n'y a pas de groupe de chiffres qui se répètent, et p n'est donc pas rationnel. Tout nombre réel, par exemple les distances à l'origine des points sur une courbe, s'exprime au moyen d'un nombre infini de chiffres. Cette infinité est caractéristique du nombre réel, mais pose certains problèmes quant à la définition constructive de celui-ci (voir *L'infini, pierre de touche du constructivisme*, pages 74 à 81).

L'infini émerge aussi de l'idée d'approximation du limité, de la valeur numérique associée à une grandeur commensurable ou incommensurable. Par exemple, $2/3$ ou $\sqrt{2}$ sont des nombres, mais leurs développements décimaux ne peuvent être donnés dans leur totalité ; néanmoins, les 10, 100 ou 1 000 premiers chiffres en constituent une approximation. Les écritures $2/3$ et $\sqrt{2}$ expriment des rapports de proportionnalité : $2/3$ est une quantité commensurable et le nombre est rationnel ; dans un carré, la diagonale est incommensurable avec le côté (on ne peut exprimer cette longueur comme un rapport, une fraction, de deux longueurs), et le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel. Dans ces deux cas, et de manière essentielle dans le second, l'infini apparaît lié à la convergence de fractions distinctes vers une limite.

En géométrie, l'infini apparaît aussi comme un processus d'approximation de limite. L'aire du cercle est la limite vers laquelle tendent les aires des polygones inscrits ou circonscrits lorsqu'on fait croître le nombre de côtés des polygones considérés. On dit alors que le nombre de côtés des polygones inscrits ou circonscrits tend

vers l'infini ; la circonférence du cercle est alors un polygone ayant un nombre infiniment grand de côtés infiniment petits. Ici, l'infini apparaît plus comme un procédé de calcul, mais plutôt



Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est initialement lié à la preuve de l'irrationalité de nombre comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}\dots$ Platon rapporte dans le *Théétète* que les mathématiciens ont démontré l'irrationalité de ces nombres jusqu'à $\sqrt{17}$. Cependant, il n'indique pas comment ils y parviennent, ni pourquoi il s'arrête à $\sqrt{17}$.

Aristote, dans la *Métaphysique*, propose une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, désormais classique : supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, c'est-à-dire exprimable comme rapport de deux entiers naturels, disons a et b , de telle manière que a et b soient premiers entre eux. On a $\sqrt{2} = a/b$. En multipliant par b de chaque côté, on obtient $\sqrt{2}b = a$. En élevant au carré, il vient $a^2 = 2b^2$, ce qui implique que a^2 est pair, et donc que a l'est aussi. On pose $a = 2p$. De là, il vient $2b^2 = (2p)^2 = 4p^2$, puis $b^2 = 2p^2$, ce qui signifie que b est pair lui aussi. On a ainsi montré que a et b sont pairs ; ils ne sont donc pas premiers entre eux, contrairement à ce qui a été supposé. Par conséquent, l'hypothèse de la rationalité de $\sqrt{2}$ conduit à une absurdité et doit être rejetée.

comme le résultat du processus de calcul. Il est le nombre qui termine la succession des nombres entiers, la limite des valeurs numériques successives d'une même variable qui croît (ou décroît) à chaque étape. Similairement, pour achever la droite réelle, on a besoin de deux infinis, $+\infty$ et $-\infty$. Le plan euclidien, lui, se complète par la droite à l'infini, utile en perspective (voir *De la perspective à l'infini géométrique*, pages 66 à 72), dont chacun des points est l'intersection des droites parallèles à une direction donnée.

Les points du plan à l'infini permettent, à condition d'admettre les principes de continuité et de dualité, de passer d'un espace métrique à un espace projectif. Par exemple, dans un plan euclidien, deux points déterminent une droite, mais deux droites ne déterminent pas toujours un point (quand elles sont parallèles) ; il n'y a pas de symétrie dans l'énoncé. Or, en admettant que deux droites parallèles se coupent à l'infini en un point unique, l'énoncé réciproque devient vrai.

Une symphonie sur le thème de l'infini

L'infini géométrique se distingue de l'illimité : on conçoit aisément un espace illimité (c'est-à-dire sans frontières), mais fini, comme la sphère. Il y a identité entre infinitude et illimité dans le seul contexte euclidien métrique. Pour un calcul numérique, cela signifie que la possibilité d'ajou-

ter un, qui caractérise l'infini potentiel, se présente comme une propriété métrique, quantitative ; l'illimité est ici encore identifié à l'infini potentiel.

Revenons à l'infini vu comme approximation d'une valeur donnée. En pratique, si l'on mesure la diagonale d'un carré, la précision des appareils limite la mesure à quelques décimales. Le résultat d'une mesure est toujours un nombre rationnel ; l'irrationnel n'a pas de place dans le champ expérimental.

Le mathématicien n'est pas handicapé par cette exclusion. Il comprend que $\sqrt{2}$ a un développement décimal infini non périodique, il affirme que $\sqrt{2}$ est irrationnel ; quelle que soit la mesure effectuée, elle restera toujours inexacte. Dans la possibilité de dépassement, le mathématicien trouve la cohérence d'un mode opératoire et de son résultat. Il invente des méthodes de démonstration qui assoient la cohérence des définitions des objets idéaux qu'il a introduits, l'infini identifié avec l'illimité, l'irrationalité de nombres comme $\sqrt{2}$.

Les mathématiques s'enrichissent continuellement de nouvelles méthodes de démonstration : méthodes associées au dépassement sans limitation ; méthodes liées à l'itération et à la convergence, comme la démonstration par récurrence ; méthodes rattachées à l'impossibilité de l'irrationalité et qui utilisent



2. POINCARÉ (à gauche) pensait que l'infini potentiel suffisait aux mathématiciens et se méfiait des paradoxes induits par la hiérarchie des ensembles infinis de Cantor. **HILBERT (à droite)** était plus optimiste et ne voulait pas se priver du paradis que Cantor avait ouvert aux mathématiciens.