

lui aussi, en base dix, avec une infinité de chiffres après la virgule, mais, à la différence du rationnel, ne présente pas de périodicité. Ainsi, dans le nombre $p = 3,14159\dots$ il n'y a pas de groupe de chiffres qui se répètent, et p n'est donc pas rationnel. Tout nombre réel, par exemple les distances à l'origine des points sur une courbe, s'exprime au moyen d'un nombre infini de chiffres. Cette infinité est caractéristique du nombre réel, mais pose certains problèmes quant à la définition constructive de celui-ci (voir *L'infini, pierre de touche du constructivisme*, pages 74 à 81).

L'infini émerge aussi de l'idée d'approximation du limité, de la valeur numérique associée à une grandeur commensurable ou incommensurable. Par exemple, $2/3$ ou $\sqrt{2}$ sont des nombres, mais leurs développements décimaux ne peuvent être donnés dans leur totalité ; néanmoins, les 10, 100 ou 1 000 premiers chiffres en constituent une approximation. Les écritures $2/3$ et $\sqrt{2}$ expriment des rapports de proportionnalité : $2/3$ est une quantité commensurable et le nombre est rationnel ; dans un carré, la diagonale est incommensurable avec le côté (on ne peut exprimer cette longueur comme un rapport, une fraction, de deux longueurs), et le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel. Dans ces deux cas, et de manière essentielle dans le second, l'infini apparaît lié à la convergence de fractions distinctes vers une limite.

En géométrie, l'infini apparaît aussi comme un processus d'approximation de limite. L'aire du cercle est la limite vers laquelle tendent les aires des polygones inscrits ou circonscrits lorsqu'on fait croître le nombre de côtés des polygones considérés. On dit alors que le nombre de côtés des polygones inscrits

ou circonscrits tend vers l'infini ; la circonférence du cercle est alors un polygone ayant un nombre infiniment grand de côtés infinis. Ici, l'infini apparaît plus comme un procédé de calcul, mais plutôt



Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est initialement lié à la preuve de l'irrationalité de nombre comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}\dots$ Platon rapporte dans le *Théétète* que les mathématiciens ont démontré l'irrationalité de ces nombres jusqu'à $\sqrt{17}$. Cependant, il n'indique pas comment ils y parviennent, ni pourquoi il s'arrête à $\sqrt{17}$.

Aristote, dans la *Métaphysique*, propose une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, désormais classique : supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, c'est-à-dire exprimable comme rapport de deux entiers naturels, disons a et b , de telle manière que a et b soient premiers entre eux. On a $\sqrt{2} = a/b$. En multipliant par b de chaque côté, on obtient $\sqrt{2}b = a$. En élevant au carré, il vient $a^2 = 2b^2$, ce qui implique que a^2 est pair, et donc que a l'est aussi. On pose $a = 2p$. De là, il vient $2b^2 = (2p)^2 = 4p^2$, puis $b^2 = 2p^2$, ce qui signifie que b est pair lui aussi. On a ainsi montré que a et b sont pairs ; ils ne sont donc pas premiers entre eux, contrairement à ce qui a été supposé. Par conséquent, l'hypothèse de la rationalité de $\sqrt{2}$ conduit à une absurdité et doit être rejetée.

comme le résultat du processus de calcul. Il est le nombre qui termine la succession des nombres entiers, la limite des valeurs numériques successives d'une même variable qui croît (ou décroît) à chaque étape. Similairement, pour achever la droite réelle, on a besoin de deux infinis, $+\infty$ et $-\infty$. Le plan euclidien, lui, se complète par la droite à l'infini, utile en perspective (voir *De la perspective à l'infini géométrique*, pages 66 à 72), dont chacun des points est l'intersection des droites parallèles à une direction donnée.

Les points du plan à l'infini permettent, à condition d'admettre les principes de continuité et de dualité, de passer d'un espace métrique à un espace projectif. Par exemple, dans un plan euclidien, deux points déterminent une droite, mais deux droites ne déterminent pas toujours un point (quand elles sont parallèles) ; il n'y a pas de symétrie dans l'énoncé. Or, en admettant que deux droites parallèles se coupent à l'infini en un point unique, l'énoncé réciproque devient vrai.

Une symphonie sur le thème de l'infini

L'infini géométrique se distingue de l'illimité : on conçoit aisément un espace illimité (c'est-à-dire sans frontières), mais fini, comme la sphère. Il y a identité entre infinitude et illimité dans le seul contexte euclidien métrique. Pour un calcul numérique, cela signifie que la possibilité d'ajou-

2. POINCARÉ (à gauche) pensait que l'infini potentiel suffisait aux mathématiciens et se méfiait des paradoxes induits par la hiérarchie des ensembles infinis de Cantor. **HILBERT (à droite)** était plus optimiste et ne voulait pas se priver du paradis que Cantor avait ouvert aux mathématiciens.

ter un, qui caractérise l'infini potentiel, se présente comme une propriété métrique, quantitative ; l'illimité est ici encore identifié à l'infini potentiel.

Revenons à l'infini vu comme approximation d'une valeur donnée. En pratique, si l'on mesure la diagonale d'un carré, la précision des appareils limite la mesure à quelques décimales. Le résultat d'une mesure est toujours un nombre rationnel ; l'irrationnel n'a pas de place dans le champ expérimental.

Le mathématicien n'est pas handicapé par cette exclusion. Il comprend que $\sqrt{2}$ a un développement décimal infini non périodique, il affirme que $\sqrt{2}$ est irrationnel ; quelle que soit la mesure effectuée, elle restera toujours inexacte. Dans la possibilité de dépassement, le mathématicien trouve la cohérence d'un mode opératoire et de son résultat. Il invente des méthodes de démonstration qui assoient la cohérence des définitions des objets idéaux qu'il a introduits, l'infini identifié avec l'illimité, l'irrationalité de nombres comme $\sqrt{2}$.

Les mathématiques s'enrichissent continuellement de nouvelles méthodes de démonstration : méthodes associées au dépassement sans limitation ; méthodes liées à l'itération et à la convergence, comme la démonstration par récurrence ; méthodes rattachées à l'impossibilité de l'irrationalité et qui utilisent



une démonstration par l'absurde, méthodes liées aux ensembles hyper-infinis (voir *L'infini est-il nécessaire?*, pages 102 à 106, et *L'infini est un révélateur*, pages 138 à 142).

Revenons au principe de répétition sans fin utilisé dans la démonstration de l'existence d'une infinité de nombres premiers. La proposition 20 du livre IX des *Éléments* d'Euclide établit que «les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée». Dans la preuve d'Euclide, on construit un nombre premier qui n'est pas dans la liste des premiers préalablement considérée. On l'y ajoute. On a alors un nouvel ensemble de nombres premiers auquel on peut appliquer à nouveau le procédé de construction ; aujourd'hui, nous disons qu'«il existe une infinité de nombres premiers». Cette formulation, qui identifie l'illimité et l'infini actuel, trahit peut-être la pensée d'Euclide.

Hilbert voyait dans l'analyse infinitésimale le lieu d'expression privilégié de l'infini potentiel : «En un certain sens, l'analyse mathématique n'est rien moins qu'une symphonie sur le thème de l'infini.» L'analyse infinitésimale naît dans un contexte géométrique en relation avec le calcul de longueurs, d'aires et de volumes déter-

minés par une courbe, donnée comme graphe d'une fonction. D'un point de vue cinématique, cette courbe représente la trajectoire d'un point en mouvement en fonction du temps. L'étude du comportement d'une fonction se fait au voisinage d'un point, sur un intervalle élémentaire.

L'analyse infinitésimale est un cadre idéal pour comprendre les phénomènes physiques, mais elle a longtemps reposé sur des bases énigmatiques (voir *La science du mouvement au XVII^e siècle*, pages 58 à 63). Les physiciens établissent d'abord une équation différentielle qui régit le phénomène, et ils intègrent cette équation sur l'intervalle du domaine d'étude. Dans cette démarche apparaissent les concepts clés de l'analyse infinitésimale (dérivée, différentielle, intégrale, continuité, etc.), qui utilisent les notions de limite et d'approximation, c'est-à-dire d'infini potentiel.

Continuité et dérivabilité

L'idée de continuité – intuitivement la possibilité de tracer une courbe sur une feuille de papier sans lever le crayon est déjà formalisée par Augustin Cauchy qui définit qu'une fonction $f(x)$ est continue par rapport à x si un

accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Autrement dit, pour un accroissement h petit par rapport à x , la différence $f(x + h) - f(x)$ décroît indéfiniment avec h .

En termes de limite, une fonction f , définie pour tous les éléments x d'un segment fermé $[a, b]$, est dite continue en un élément x_0 du segment $[a, b]$ si la limite de $f(x)$, quand x tend vers x_0 , est égale à $f(x_0)$.

Cauchy précise qu'«une quantité variable devient infiniment petite quand sa valeur numérique décroît indéfiniment en convergeant vers zéro». Dans ce langage dynamique, les quantités sont des grandeurs qui augmentent ou diminuent, leurs valeurs numériques associées convergeant respectivement vers l'infini ou vers 0.

En termes statiques, les points de l'intervalle sont donnés «en acte». La formulation de Cauchy n'a alors pas véritablement de sens et peut être éliminée au profit de concepts de nature plus arithmétique comme ceux de majoration, de minoration ou d'approximation. Dans ce cas, l'énoncé de la continuité d'une fonction en un point x_0 prend la forme suivante : la fonction f est continue en x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

La nouvelle formulation traduit un glissement conceptuel. Les intervalles cessent d'être considérés comme des grandeurs étendues, qui diminuent ou augmentent, pour être vus comme des ensembles de points donnés en compréhension. Les intervalles pourront devenir plus grands ou plus petits, sans qu'ils puissent augmenter ou diminuer dynamiquement et, bien évidemment, sans que leurs éléments puissent changer. L'infini est donc donné actuel et non comme processus. Nous sommes passés d'un infini potentiel à un infini actuel, comme nous étions passés du plan euclidien au plan projectif.

La notion de dérivabilité prolonge la notion de continuité. La dérivée d'une fonction en un point x_0 est donnée par :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) / h,$$

chaque fois que cette limite a un sens. Une fonction est dérivable en un point si elle admet une dérivée en ce point. Elle y sera alors aussi continue (en revanche, la réciproque n'est pas toujours vraie, comme nous le verrons, une courbe continue n'est pas toujours

Le raisonnement par récurrence ou induction complète

Essayons de comprendre le principe du raisonnement par récurrence à partir de l'inégalité dite de Bernoulli, qui s'énonce comme suit : $(1 + x)^n > 1 + nx$ pour tout $n \geq 2$.

Une récurrence se fait en trois étapes :

1. On commence par vérifier l'inégalité pour le premier entier naturel qui satisfait les conditions de l'énoncé, c'est-à-dire ici pour $n = 2$:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x, \text{ car } x^2 \text{ est toujours positif}$$

2. On formule l'hypothèse de récurrence – dans notre exemple, on suppose que l'inégalité est vraie pour un certain entier k – et l'on montre qu'elle reste encore vraie pour l'entier $k + 1$.

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x) > (1 + kx) (1 + x) = 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (1 + k)x + kx^2 > 1 + (1 + k)x$$

3. (Clause de fermeture.) Comme k est un entier naturel quelconque, la proposition est démontrée pour tous les entiers naturels.

Il convient de distinguer la récurrence de l'induction ordinaire. Cette dernière consiste à vérifier la propriété entier après entier et n'est valable que pour les seuls entiers effectivement considérés. Il n'y a pas de clause de fermeture. Il peut donc arriver que la propriété ne soit pas satisfaite par un certain entier. En particulier, même si, dans les cas examinés, en nombre nécessairement fini, aucun contre-exemple n'a été trouvé, cela ne signifie pas qu'il n'en existe pas. Hume avait repéré cette faiblesse essentielle de l'induction ordinaire. La fermeture dans l'induction complète exclut la possibilité de l'existence du contre-exemple ; l'affirmation vaut pour tous les entiers. Ce qui exige que la propriété à vérifier soit définie pour tous les entiers.

