

une démonstration par l'absurde, méthodes liées aux ensembles hyper-infinis (voir *L'infini est-il nécessaire?*, pages 102 à 106, et *L'infini est un révélateur*, pages 138 à 142).

Revenons au principe de répétition sans fin utilisé dans la démonstration de l'existence d'une infinité de nombres premiers. La proposition 20 du livre IX des *Éléments* d'Euclide établit que «les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée». Dans la preuve d'Euclide, on construit un nombre premier qui n'est pas dans la liste des premiers préalablement considérée. On l'y ajoute. On a alors un nouvel ensemble de nombres premiers auquel on peut appliquer à nouveau le procédé de construction ; aujourd'hui, nous disons qu'«il existe une infinité de nombres premiers». Cette formulation, qui identifie l'illimité et l'infini actuel, trahit peut-être la pensée d'Euclide.

Hilbert voyait dans l'analyse infinitésimale le lieu d'expression privilégié de l'infini potentiel : «En un certain sens, l'analyse mathématique n'est rien moins qu'une symphonie sur le thème de l'infini.» L'analyse infinitésimale naît dans un contexte géométrique en relation avec le calcul de longueurs, d'aires et de volumes déter-

minés par une courbe, donnée comme graphe d'une fonction. D'un point de vue cinématique, cette courbe représente la trajectoire d'un point en mouvement en fonction du temps. L'étude du comportement d'une fonction se fait au voisinage d'un point, sur un intervalle élémentaire.

L'analyse infinitésimale est un cadre idéal pour comprendre les phénomènes physiques, mais elle a longtemps reposé sur des bases énigmatiques (voir *La science du mouvement au XVII^e siècle*, pages 58 à 63). Les physiciens établissent d'abord une équation différentielle qui régit le phénomène, et ils intègrent cette équation sur l'intervalle du domaine d'étude. Dans cette démarche apparaissent les concepts clés de l'analyse infinitésimale (dérivée, différentielle, intégrale, continuité, etc.), qui utilisent les notions de limite et d'approximation, c'est-à-dire d'infini potentiel.

Continuité et dérivabilité

L'idée de continuité – intuitivement la possibilité de tracer une courbe sur une feuille de papier sans lever le crayon est déjà formalisée par Augustin Cauchy qui définit qu'une fonction $f(x)$ est continue par rapport à x si un

accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Autrement dit, pour un accroissement h petit par rapport à x , la différence $f(x + h) - f(x)$ décroît indéfiniment avec h .

En termes de limite, une fonction f , définie pour tous les éléments x d'un segment fermé $[a, b]$, est dite continue en un élément x_0 du segment $[a, b]$ si la limite de $f(x)$, quand x tend vers x_0 , est égale à $f(x_0)$.

Cauchy précise qu'«une quantité variable devient infiniment petite quand sa valeur numérique décroît indéfiniment en convergeant vers zéro». Dans ce langage dynamique, les quantités sont des grandeurs qui augmentent ou diminuent, leurs valeurs numériques associées convergeant respectivement vers l'infini ou vers 0.

En termes statiques, les points de l'intervalle sont donnés «en acte». La formulation de Cauchy n'a alors pas véritablement de sens et peut être éliminée au profit de concepts de nature plus arithmétique comme ceux de majoration, de minoration ou d'approximation. Dans ce cas, l'énoncé de la continuité d'une fonction en un point x_0 prend la forme suivante : la fonction f est continue en x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

La nouvelle formulation traduit un glissement conceptuel. Les intervalles cessent d'être considérés comme des grandeurs étendues, qui diminuent ou augmentent, pour être vus comme des ensembles de points donnés en compréhension. Les intervalles pourront devenir plus grands ou plus petits, sans qu'ils puissent augmenter ou diminuer dynamiquement et, bien évidemment, sans que leurs éléments puissent changer. L'infini est donc donné actuel et non comme processus. Nous sommes passés d'un infini potentiel à un infini actuel, comme nous étions passés du plan euclidien au plan projectif.

La notion de dérivabilité prolonge la notion de continuité. La dérivée d'une fonction en un point x_0 est donnée par :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) / h,$$

chaque fois que cette limite a un sens. Une fonction est dérivable en un point si elle admet une dérivée en ce point. Elle y sera alors aussi continue (en revanche, la réciproque n'est pas toujours vraie, comme nous le verrons, une courbe continue n'est pas toujours

Le raisonnement par récurrence ou induction complète

Essayons de comprendre le principe du raisonnement par récurrence à partir de l'inégalité dite de Bernoulli, qui s'énonce comme suit : $(1 + x)^n > 1 + nx$ pour tout $n \geq 2$.

Une récurrence se fait en trois étapes :

1. On commence par vérifier l'inégalité pour le premier entier naturel qui satisfait les conditions de l'énoncé, c'est-à-dire ici pour $n = 2$:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x, \text{ car } x^2 \text{ est toujours positif}$$

2. On formule l'hypothèse de récurrence – dans notre exemple, on suppose que l'inégalité est vraie pour un certain entier k – et l'on montre qu'elle reste encore vraie pour l'entier $k + 1$.

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x) > (1 + kx) (1 + x) = 1 + x + kx + kx^2 \\ = 1 + (1 + k)x + kx^2 > 1 + (1 + k)x$$

3. (Clause de fermeture.) Comme k est un entier naturel quelconque, la proposition est démontrée pour tous les entiers naturels.

Il convient de distinguer la récurrence de l'induction ordinaire. Cette dernière consiste à vérifier la propriété entier après entier et n'est valable que pour les seuls entiers effectivement considérés. Il n'y a pas de clause de fermeture. Il peut donc arriver que la propriété ne soit pas satisfaite par un certain entier. En particulier, même si, dans les cas examinés, en nombre nécessairement fini, aucun contre-exemple n'a été trouvé, cela ne signifie pas qu'il n'en existe pas. Hume avait repéré cette faiblesse essentielle de l'induction ordinaire. La fermeture dans l'induction complète exclut la possibilité de l'existence du contre-exemple ; l'affirmation vaut pour tous les entiers. Ce qui exige que la propriété à vérifier soit définie pour tous les entiers.

