

une démonstration par l'absurde, méthodes liées aux ensembles hyper-infinis (voir *L'infini est-il nécessaire?*, pages 102 à 106, et *L'infini est un révélateur*, pages 138 à 142).

Revenons au principe de répétition sans fin utilisé dans la démonstration de l'existence d'une infinité de nombres premiers. La proposition 20 du livre IX des *Éléments* d'Euclide établit que «les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée». Dans la preuve d'Euclide, on construit un nombre premier qui n'est pas dans la liste des premiers préalablement considérée. On l'y ajoute. On a alors un nouvel ensemble de nombres premiers auquel on peut appliquer à nouveau le procédé de construction ; aujourd'hui, nous disons qu'«il existe une infinité de nombres premiers». Cette formulation, qui identifie l'illimité et l'infini actuel, trahit peut-être la pensée d'Euclide.

Hilbert voyait dans l'analyse infinitésimale le lieu d'expression privilégié de l'infini potentiel : «En un certain sens, l'analyse mathématique n'est rien moins qu'une symphonie sur le thème de l'infini.» L'analyse infinitésimale naît dans un contexte géométrique en relation avec le calcul de longueurs, d'aires et de volumes déter-

minés par une courbe, donnée comme graphe d'une fonction. D'un point de vue cinématique, cette courbe représente la trajectoire d'un point en mouvement en fonction du temps. L'étude du comportement d'une fonction se fait au voisinage d'un point, sur un intervalle élémentaire.

L'analyse infinitésimale est un cadre idéal pour comprendre les phénomènes physiques, mais elle a longtemps reposé sur des bases énigmatiques (voir *La science du mouvement au XVII^e siècle*, pages 58 à 63). Les physiciens établissent d'abord une équation différentielle qui régit le phénomène, et ils intègrent cette équation sur l'intervalle du domaine d'étude. Dans cette démarche apparaissent les concepts clés de l'analyse infinitésimale (dérivée, différentielle, intégrale, continuité, etc.), qui utilisent les notions de limite et d'approximation, c'est-à-dire d'infini potentiel.

Continuité et dérivabilité

L'idée de continuité – intuitivement la possibilité de tracer une courbe sur une feuille de papier sans lever le crayon est déjà formalisée par Augustin Cauchy qui définit qu'une fonction $f(x)$ est continue par rapport à x si un

accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Autrement dit, pour un accroissement h petit par rapport à x , la différence $f(x + h) - f(x)$ décroît indéfiniment avec h .

En termes de limite, une fonction f , définie pour tous les éléments x d'un segment fermé $[a, b]$, est dite continue en un élément x_0 du segment $[a, b]$ si la limite de $f(x)$, quand x tend vers x_0 , est égale à $f(x_0)$.

Cauchy précise qu'«une quantité variable devient infiniment petite quand sa valeur numérique décroît indéfiniment en convergeant vers zéro». Dans ce langage dynamique, les quantités sont des grandeurs qui augmentent ou diminuent, leurs valeurs numériques associées convergeant respectivement vers l'infini ou vers 0.

En termes statiques, les points de l'intervalle sont donnés «en acte». La formulation de Cauchy n'a alors pas véritablement de sens et peut être éliminée au profit de concepts de nature plus arithmétique comme ceux de majoration, de minoration ou d'approximation. Dans ce cas, l'énoncé de la continuité d'une fonction en un point x_0 prend la forme suivante : la fonction f est continue en x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

La nouvelle formulation traduit un glissement conceptuel. Les intervalles cessent d'être considérés comme des grandeurs étendues, qui diminuent ou augmentent, pour être vus comme des ensembles de points donnés en compréhension. Les intervalles pourront devenir plus grands ou plus petits, sans qu'ils puissent augmenter ou diminuer dynamiquement et, bien évidemment, sans que leurs éléments puissent changer. L'infini est donc donné actuel et non comme processus. Nous sommes passés d'un infini potentiel à un infini actuel, comme nous étions passés du plan euclidien au plan projectif.

La notion de dérivabilité prolonge la notion de continuité. La dérivée d'une fonction en un point x_0 est donnée par :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) / h,$$

chaque fois que cette limite a un sens. Une fonction est dérivable en un point si elle admet une dérivée en ce point. Elle y sera alors aussi continue (en revanche, la réciproque n'est pas toujours vraie, comme nous le verrons, une courbe continue n'est pas toujours

Le raisonnement par récurrence ou induction complète

Essayons de comprendre le principe du raisonnement par récurrence à partir de l'inégalité dite de Bernoulli, qui s'énonce comme suit : $(1 + x)^n > 1 + nx$ pour tout $n \geq 2$.

Une récurrence se fait en trois étapes :

1. On commence par vérifier l'inégalité pour le premier entier naturel qui satisfait les conditions de l'énoncé, c'est-à-dire ici pour $n = 2$:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x, \text{ car } x^2 \text{ est toujours positif}$$

2. On formule l'hypothèse de récurrence – dans notre exemple, on suppose que l'inégalité est vraie pour un certain entier k – et l'on montre qu'elle reste encore vraie pour l'entier $k + 1$.

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x) > (1 + kx) (1 + x) = 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (1 + k)x + kx^2 > 1 + (1 + k)x$$

3. (Clause de fermeture.) Comme k est un entier naturel quelconque, la proposition est démontrée pour tous les entiers naturels.

Il convient de distinguer la récurrence de l'induction ordinaire. Cette dernière consiste à vérifier la propriété entier après entier et n'est valable que pour les seuls entiers effectivement considérés. Il n'y a pas de clause de fermeture. Il peut donc arriver que la propriété ne soit pas satisfaite par un certain entier. En particulier, même si, dans les cas examinés, en nombre nécessairement fini, aucun contre-exemple n'a été trouvé, cela ne signifie pas qu'il n'en existe pas. Hume avait repéré cette faiblesse essentielle de l'induction ordinaire. La fermeture dans l'induction complète exclut la possibilité de l'existence du contre-exemple ; l'affirmation vaut pour tous les entiers. Ce qui exige que la propriété à vérifier soit définie pour tous les entiers.



dérivable). La courbe associée à la fonction f possède en ce point une tangente, la valeur de la dérivée étant égale à la pente de cette tangente. Il est alors possible d'étudier le comportement de la fonction – de savoir si elle est croissante ou décroissante, si elle admet un maximum ou un point d'inflexion – en examinant les dérivées successives de la fonction au point considéré.

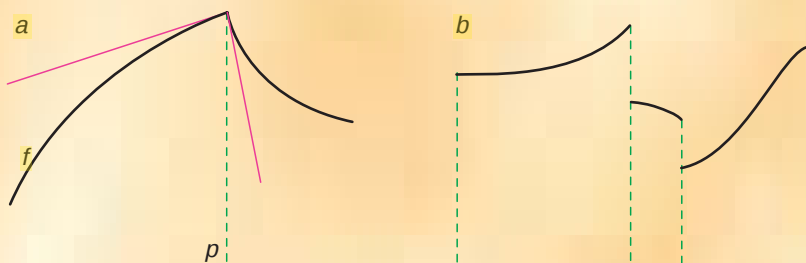
Lorsque la variable d'une fonction parcourt l'ensemble des entiers naturels, l'étude de son comportement se ramène à l'étude d'une suite $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. De là, on passe au concept de série infinie formée par les sommes partielles successives des n premiers termes de la suite.

Les fonctions continues classiques sont en général très régulières ; indéfiniment dérivables, elles possèdent, en chaque point, une tangente. Mais il existe des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun de leurs points (en conséquence de quoi, elles ne peuvent avoir une représentation géométrique au moyen d'un graphe) ou qui remplissent le plan tout entier, comme la courbe construite par Peano en 1890 (voir l'encadré de la page 28). Pour comprendre ces courbes tératologiques, il faut avoir recours au concept d'infini potentiel, pris ici comme itération d'un processus d'approximation. On peut approcher uniformément une fonction continue par des fonctions indéfiniment dérivables sur un intervalle ; on remplace la fonction en chacun de ses points par la moyenne des valeurs qu'elle prend sur un petit intervalle autour de ce point.

Les méthodes d'approximation sont très souvent utilisées en analyse infinitésimale. Par exemple, approximer une fonction consiste à remplacer la fonction considérée par une fonction polynomiale ; en d'autres termes, la remplacer par sa série de Taylor associée. Cette approximation est justifiée par le théorème de Karl Weierstrass, qui énonce que « toute fonction complexe f continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ peut être approchée uniformément sur $[a, b]$ par des polynômes ».

Une fonction se développe aussi en série entière, sous la forme $f(z) = \sum c_n (z - z_0)^n$, (n variant de 0 à l'infini), le second membre convergent sur un disque du plan complexe. Il y a donc une correspondance entre comportement de série et comportement de fonction. L'utilisation

Dérivabilité et continuité d'une fonction



La fonction f de la figure a admet, au point p , une dérivée à gauche et une dérivée à droite, de pentes différentes : la courbe a deux demi-tangentes au point considéré. La fonction n'est donc pas dérivable en ce point, bien qu'elle y soit continue.

Les notions de dérivabilité et de continuité n'ont pas vraiment été distinguées avant le milieu du XIX^e siècle, la nécessité ne s'en faisant pas sentir. Pendant très longtemps, les fonctions étudiées étaient suffisamment régulières ; les courbes représentatives admettaient une tangente en tout point ou avaient un nombre fini de discontinuités, faciles à comprendre, comme dans la figure b qui représente une fonction en escalier.

Avec l'apparition des fonctions pathologiques, comme celles qui recouvrent entièrement un carré – la courbe de Peano – ou les courbes ayant une infinité de points de discontinuité – comme celle donnée par Weierstrass –, la situation change et exige de préciser le sens des deux notions. Il faut pour cela commencer par accepter que l'ensemble des définitions d'une fonction et l'ensemble des valeurs qu'elle prend puissent contenir, comme élément, l'infini (actuel).

Le flocon de neige ou courbe de Koch est un autre exemple de courbe tératologique. C'est une courbe de longueur infinie qui délimite une surface finie. Elle s'obtient en partant d'un triangle équilatéral – les trois sommets sont donc des points anguleux en lesquels il n'y a pas de dérivées –, puis en construisant sur chaque côté du triangle un autre triangle équilatéral dont la longueur d'un côté est le tiers de la longueur d'un côté du triangle initial. Puis on réitère la construction une infinité de fois. La courbe obtenue est bien continue. Le flocon de neige est une courbe continue, mais n'est dérivable en aucun de ses points. À la différence des courbes de Weierstrass et de Peano, qui peuvent s'exprimer analytiquement, le flocon de neige n'est pas le graphe d'une fonction. Publiée par Koch en 1906, le flocon de neige est un des premiers exemples de courbes fractales.

L'ensemble de Mandelbrot est peut-être encore plus pathologique. Il est défini comme la frontière des points du plan complexe obtenus en itérant indéfiniment la fonction de la variable complexe z définie par $z^2 + c$, où c désigne aussi un paramètre complexe. La définition se prête bien au dessin assisté par ordinateur ; la méthode mise au point par John Hubbard et utilisée par Peitgen et Richter consiste à colorier des points en fonction de leur position par rapport à une frontière dont ils s'approchent de plus en plus.

L'existence des courbes fractales généralise la notion de dimension en géométrie ; il existe des objets géométriques dont la dimension n'est pas entière.

