

dérivable). La courbe associée à la fonction f possède en ce point une tangente, la valeur de la dérivée étant égale à la pente de cette tangente. Il est alors possible d'étudier le comportement de la fonction – de savoir si elle est croissante ou décroissante, si elle admet un maximum ou un point d'inflexion – en examinant les dérivées successives de la fonction au point considéré.

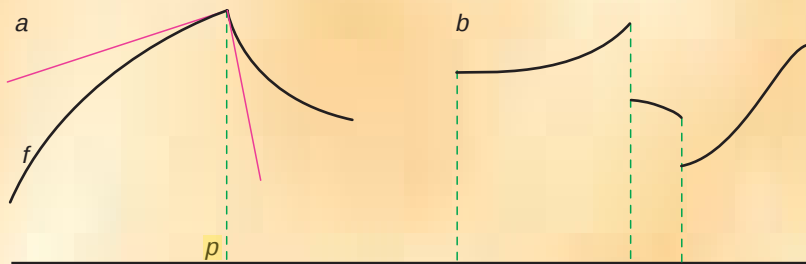
Lorsque la variable d'une fonction parcourt l'ensemble des entiers naturels, l'étude de son comportement se ramène à l'étude d'une suite $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. De là, on passe au concept de série infinie formée par les sommes partielles successives des n premiers termes de la suite.

Les fonctions continues classiques sont en général très régulières ; indéfiniment dérivables, elles possèdent, en chaque point, une tangente. Mais il existe des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun de leurs points (en conséquence de quoi, elles ne peuvent avoir une représentation géométrique au moyen d'un graphe) ou qui remplissent le plan tout entier, comme la courbe construite par Peano en 1890 (voir l'encadré de la page 28). Pour comprendre ces courbes tératologiques, il faut avoir recours au concept d'infini potentiel, pris ici comme itération d'un processus d'approximation. On peut approcher uniformément une fonction continue par des fonctions indéfiniment dérivables sur un intervalle ; on remplace la fonction en chacun de ses points par la moyenne des valeurs qu'elle prend sur un petit intervalle autour de ce point.

Les méthodes d'approximation sont très souvent utilisées en analyse infinitésimale. Par exemple, approximer une fonction consiste à remplacer la fonction considérée par une fonction polynomiale ; en d'autres termes, la remplacer par sa série de Taylor associée. Cette approximation est justifiée par le théorème de Karl Weierstrass, qui énonce que « toute fonction complexe f continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ peut être approchée uniformément sur $[a, b]$ par des polynômes ».

Une fonction se développe aussi en série entière, sous la forme $f(z) = \sum c_n (z - z_0)^n$, (n variant de 0 à l'infini), le second membre convergant sur un disque du plan complexe. Il y a donc une correspondance entre comportement de série et comportement de fonction. L'utilisation

Dérivabilité et continuité d'une fonction



La fonction f de la figure a admet, au point p , une dérivée à gauche et une dérivée à droite, de pentes différentes : la courbe a deux demi-tangentes au point considéré. La fonction n'est donc pas dérivable en ce point, bien qu'elle y soit continue.

Les notions de dérivabilité et de continuité n'ont pas vraiment été distinguées avant le milieu du XIX^e siècle, la nécessité ne s'en faisant pas sentir. Pendant très longtemps, les fonctions étudiées étaient suffisamment régulières ; les courbes représentatives admettaient une tangente en tout point ou avaient un nombre fini de discontinuités, faciles à comprendre, comme dans la figure b qui représente une fonction en escalier.

Avec l'apparition des fonctions pathologiques, comme celles qui recouvrent entièrement un carré – la courbe de Peano – ou les courbes ayant une infinité de points de discontinuité – comme celle donnée par Weierstrass –, la situation change et exige de préciser le sens des deux notions. Il faut pour cela commencer par accepter que l'ensemble des définitions d'une fonction et l'ensemble des valeurs qu'elle prend puissent contenir, comme élément, l'infini (actuel).

Le flocon de neige ou courbe de Koch est un autre exemple de courbe tératologique. C'est une courbe de longueur infinie qui délimite une surface finie. Elle s'obtient en partant d'un triangle équilatéral – les trois sommets sont donc des points anguleux en lesquels il n'y a pas de dérivées –, puis en construisant sur chaque côté du triangle un autre triangle équilatéral dont la longueur d'un côté est le tiers de la longueur d'un côté du triangle initial. Puis on réitère la construction une infinité de fois. La courbe obtenue est bien continue. Le flocon de neige est une courbe continue, mais n'est dérivable en aucun de ses points. À la différence des courbes de Weierstrass et de Peano, qui peuvent s'exprimer analytiquement, le flocon de neige n'est pas le graphe d'une fonction. Publiée par Koch en 1906, le flocon de neige est un des premiers exemples de courbes fractales.



L'ensemble de Mandelbrot est peut-être encore plus pathologique. Il est défini comme la frontière des points du plan complexe obtenus en itérant indéfiniment la fonction de la variable complexe z définie par $z^2 + c$, où c désigne aussi un paramètre complexe. La définition se prête bien au dessin assisté par ordinateur ; la méthode mise au point par John Hubbard et utilisée par Peitgen et Richter consiste à colorier des points en fonction de leur position par rapport à une frontière dont ils s'approchent de plus en plus.

L'existence des courbes fractales généralise la notion de dimension en géométrie ; il existe des objets géométriques dont la dimension n'est pas entière.

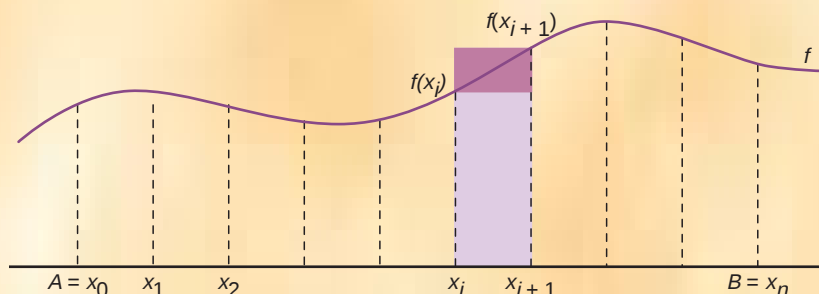


en analyse infinitésimale des méthodes d'approximation, des infinitésimaux ou des dérivées soulève le problème de l'homogénéité du découpage de tels infinitésimaux par un procédé itératif infini. L'arithmétisation de l'analyse par K. Weierstrass et son école n'y a pas apporté de solu-

tion satisfaisante. L'infini potentiel ne peut y être totalement éliminé : il se situe au cœur de l'analyse infinitésimale, comme nous l'avons vu dans la formalisation de la continuité d'une fonction en un point. Potentiel et chassé par une porte, l'infini réapparaît actuel à une autre.

Né dans un contexte géométrique, celui de la perspective et de l'inclusion du ou de points à l'infini, l'infini actuel autorise la quantification et la résolution de problèmes du monde réel. Il est l'essence des éléments idéaux (nombre infini, point à l'infini et séries avec une infinité d'éléments). La démonstration par récurrence se justifie par le passage de l'infini potentiel à l'infini actuel ; Pascal se réfère à la récurrence quand il affirme que nous connaissons qu'il y a un infini et que nous ignorons sa nature.

L'homogénéité dimensionnelle



Intuitivement, la droite est un objet de dimension 1 et le plan est un objet de dimension 2. Ainsi une réunion quelconque de droites ne peut donner un plan ; c'est le principe d'homogénéité dimensionnelle. Réciproquement, suivant le même principe, si l'on divise une droite en segments, puis ces segments en segments plus petits, et ainsi de suite, on obtiendra toujours des segments, certes infinitésimaux.

Cette idée d'homogénéité se trouve exprimée, entre autres, chez John Wallis en 1671 : «Une quantité finie (ici le segment AB) peut être supposée divisible (par dichotomie) en un nombre de parties infiniment grand (c'est-à-dire plus grand que n'importe quel nombre fini donné) : il n'y a pas de raison de croire que cette division s'arrête (puisque, même à la dernière étape effectuée, un segment, aussi petit qu'il soit, aura encore deux moitiés).»

Comment expliquer qu'une grandeur étendue quelconque, lorsqu'on la partage, reste de même dimension ? Cette question est centrale dans les œuvres de Leibniz et de Cauchy. Kant l'aborde explicitement dans son approche du continu. Pour lui, une droite n'est pas un ensemble de points défini en compréhension, mais plutôt une grandeur étendue ; quant aux points eux-mêmes, ils marquent les extrémités des segments. L'analyse non standard de Robinson propose une réponse qui ne revendique pas de filiation avec l'analyse leibnizienne. En outre, Leibniz refusait l'infini actuel, alors que précisément l'analyse non standard ne prend son sens qu'en l'admettant.

Pour calculer l'aire délimitée par la courbe représentative de f , les ordonnées des points A et B et l'axe des abscisses, Pascal remplace l'aire S sous la courbe par la somme de tous les rectangles de base «infinitésimale». Il obtient ainsi l'encadrement de S : $(x_{i+1} - x_i)f(x_i) < S < (x_{i+1} - x_i)f(x_{i+1})$, les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ devenant, à chaque itération, plus petits. Selon le principe d'homogénéité de Wallis, la répétition infinie du procédé ne fait pas apparaître de segments non divisibles. Les infinitésimaux fabriqués sont de même nature dimensionnelle que la grandeur initiale, le segment AB. L'infinitésimal n'est pas un indivisible, comme le point, de dimension 0, qui marque ou repère les extrémités de l'intervalle.

Même si la différence $x_{i+1} - x_i$ tend vers 0, $[x_i, x_{i+1}]$ reste un segment de dimension 1. Ainsi, la somme des aires S_i des rectangles ne sera pas égale, même à la limite, à l'aire S cherchée, à moins de commettre systématiquement une erreur. En identifiant $x_{i+1} - x_i$ à l'indivisible – autrement dit, à un point – on pourrait obtenir une égalité, mais cela impliquerait de rompre avec le principe d'homogénéité dimensionnelle des figures de l'espace, les rectangles infinitésimaux devant, quant à eux, être identifiés, à la limite, à des droites.

Infinis et bijections

L'ensemble des entiers naturels est un avatar de l'infini actuel comme ensemble de cardinal transfini, appelé $\aleph_0$. L'approche ensembliste de l'infini repose sur la comparaison bijective, une méthode qui supplée l'itération.

On peut comparer des ensembles sans savoir compter. Un berger alphabète se contente de comparer une à une les brebis de deux troupeaux entrant dans une bergerie pour savoir quel troupeau est le plus gros. Il saura si les troupeaux ont le même nombre de bêtes ou non. Pour pouvoir opérer ce genre de bijection, les troupeaux doivent être effectivement présents et dans leur totalité. Le point de départ est donc la donnée *a priori* de ces ensembles, : il importe peu qu'on puisse les énumérer indépendamment.

Existe-t-il un unique infini actuel ? Y en a-t-il plusieurs et combien ? Un ensemble est infini s'il peut être mis en correspondance bijective avec une de ses parties. Ainsi, l'ensemble des entiers naturels est en bijection avec l'ensemble des nombres pairs ou, plus étonnant encore, avec l'ensemble des nombres premiers. Ces deux ensembles ont donc le même nombre d'éléments, le même cardinal.

D'un point de vue purement comptable ou, si l'on reprend l'argument euclidien déjà signalé, on a envie de dire que les nombres premiers sont en plus petit nombre que les entiers. Les nombres premiers constituent une sous-partie des entiers, et les entiers s'écrivent à partir des premiers (tout nombre se décompose, de façon unique, en produit de nombres premiers). En conséquence, dans la perspective ensembliste, «le tout n'est pas plus grand que la partie». Mieux, cette caractéristique fonde la différence entre fini et infini : dans le champ du fini elle est valable, dans le champ de l'infini elle cesse de l'être.