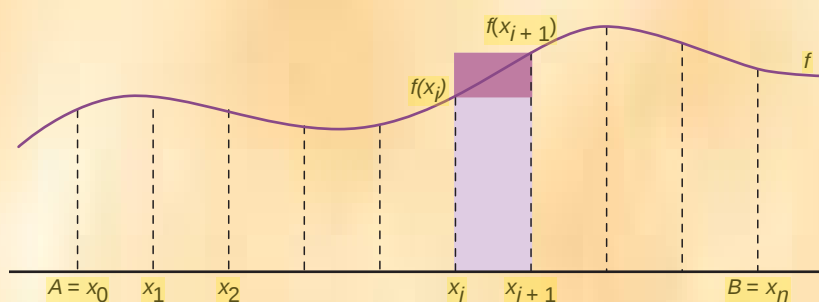


en analyse infinitésimale des méthodes d'approximation, des infinitésimaux ou des dérivées soulève le problème de l'homogénéité du découpage de tels infinitésimaux par un procédé itératif infini. L'arithmétisation de l'analyse par K. Weierstrass et son école n'y a pas apporté de solu-

tion satisfaisante. L'infini potentiel ne peut y être totalement éliminé : il se situe au cœur de l'analyse infinitésimale, comme nous l'avons vu dans la formalisation de la continuité d'une fonction en un point. Potentiel et chassé par une porte, l'infini réapparaît actuel à une autre.

L'homogénéité dimensionnelle



Intuitivement, la droite est un objet de dimension 1 et le plan est un objet de dimension 2. Ainsi une réunion quelconque de droites ne peut donner un plan ; c'est le principe d'homogénéité dimensionnelle. Réciproquement, suivant le même principe, si l'on divise une droite en segments, puis ces segments en segments plus petits, et ainsi de suite, on obtiendra toujours des segments, certes infinitésimaux.

Cette idée d'homogénéité se trouve exprimée, entre autres, chez John Wallis en 1671 : «Une quantité finie (ici le segment AB) peut être supposée divisible (par dichotomie) en un nombre de parties infiniment grand (c'est-à-dire plus grand que n'importe quel nombre fini donné) : il n'y a pas de raison de croire que cette division s'arrête (puisque, même à la dernière étape effectuée, un segment, aussi petit qu'il soit, aura encore deux moitiés).»

Comment expliquer qu'une grandeur étendue quelconque, lorsqu'on la partage, reste de même dimension ? Cette question est centrale dans les œuvres de Leibniz et de Cauchy. Kant l'aborde explicitement dans son approche du continu. Pour lui, une droite n'est pas un ensemble de points défini en compréhension, mais plutôt une grandeur étendue ; quant aux points eux-mêmes, ils marquent les extrémités des segments. L'analyse non standard de Robinson propose une réponse qui ne revendique pas de filiation avec l'analyse leibnizienne. En outre, Leibniz refusait l'infini actuel, alors que précisément l'analyse non standard ne prend son sens qu'en l'admettant.

Pour calculer l'aire délimitée par la courbe représentative de f , les ordonnées des points A et B et l'axe des abscisses, Pascal remplace l'aire S sous la courbe par la somme de tous les rectangles de base «infinitésimale». Il obtient ainsi l'encadrement de S : $(x_{i+1} - x_i)f(x_i) < S < (x_{i+1} - x_i)f(x_{i+1})$, les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ devenant, à chaque itération, plus petits. Selon le principe d'homogénéité de Wallis, la répétition infinie du procédé ne fait pas apparaître de segments non divisibles. Les infinitésimaux fabriqués sont de même nature dimensionnelle que la grandeur initiale, le segment AB. L'infinitésimal n'est pas un indivisible, comme le point, de dimension 0, qui marque ou repère les extrémités de l'intervalle.

Même si la différence $x_{i+1} - x_i$ tend vers 0, $[x_i, x_{i+1}]$ reste un segment de dimension 1. Ainsi, la somme des aires S_i des rectangles ne sera pas égale, même à la limite, à l'aire S cherchée, à moins de commettre systématiquement une erreur. En identifiant $x_{i+1} - x_i$ à l'indivisible – autrement dit, à un point – on pourrait obtenir une égalité, mais cela impliquerait de rompre avec le principe d'homogénéité dimensionnelle des figures de l'espace, les rectangles infinitésimaux devant, quant à eux, être identifiés, à la limite, à des droites.

Né dans un contexte géométrique, celui de la perspective et de l'inclusion du ou de points à l'infini, l'infini actuel autorise la quantification et la résolution de problèmes du monde réel. Il est l'essence des éléments idéaux (nombre infini, point à l'infini et séries avec une infinité d'éléments). La démonstration par récurrence se justifie par le passage de l'infini potentiel à l'infini actuel ; Pascal se réfère à la récurrence quand il affirme que nous connaissons qu'il y a un infini et que nous ignorons sa nature.

Infinis et bijections

L'ensemble des entiers naturels est un avatar de l'infini actuel comme ensemble de cardinal transfini, appelé $\aleph_0$. L'approche ensembliste de l'infini repose sur la comparaison bijective, une méthode qui supplée l'itération.

On peut comparer des ensembles sans savoir compter. Un berger alphabète se contente de comparer une à une les brebis de deux troupeaux entrant dans une bergerie pour savoir quel troupeau est le plus gros. Il saura si les troupeaux ont le même nombre de bêtes ou non. Pour pouvoir opérer ce genre de bijection, les troupeaux doivent être effectivement présents et dans leur totalité. Le point de départ est donc la donnée *a priori* de ces ensembles, : il importe peu qu'on puisse les énumérer indépendamment.

Existe-t-il un unique infini actuel ? Y en a-t-il plusieurs et combien ? Un ensemble est infini s'il peut être mis en correspondance bijective avec une de ses parties. Ainsi, l'ensemble des entiers naturels est en bijection avec l'ensemble des nombres pairs ou, plus étonnant encore, avec l'ensemble des nombres premiers. Ces deux ensembles ont donc le même nombre d'éléments, le même cardinal.

D'un point de vue purement comptable ou, si l'on reprend l'argument euclidien déjà signalé, on a envie de dire que les nombres premiers sont en plus petit nombre que les entiers. Les nombres premiers constituent une sous-partie des entiers, et les entiers s'écrivent à partir des premiers (tout nombre se décompose, de façon unique, en produit de nombres premiers). En conséquence, dans la perspective ensembliste, «le tout n'est pas plus grand que la partie». Mieux, cette caractéristique fonde la différence entre fini et infini : dans le champ du fini elle est valable, dans le champ de l'infini elle cesse de l'être.