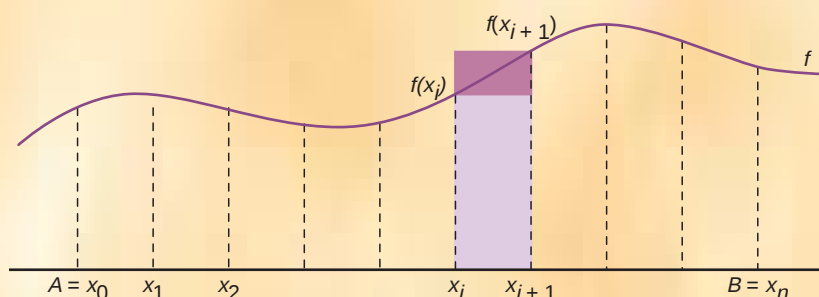


en analyse infinitésimale des méthodes d'approximation, des infinitésimaux ou des dérivées soulève le problème de l'homogénéité du découpage de tels infinitésimaux par un procédé itératif infini. L'arithmétisation de l'analyse par K. Weierstrass et son école n'y a pas apporté de solu-

tion satisfaisante. L'infini potentiel ne peut y être totalement éliminé : il se situe au cœur de l'analyse infinitésimale, comme nous l'avons vu dans la formalisation de la continuité d'une fonction en un point. Potentiel et chassé par une porte, l'infini réapparaît actuel à une autre.

Né dans un contexte géométrique, celui de la perspective et de l'inclusion du ou de points à l'infini, l'infini actuel autorise la quantification et la résolution de problèmes du monde réel. Il est l'essence des éléments idéaux (nombre infini, point à l'infini et séries avec une infinité d'éléments). La démonstration par récurrence se justifie par le passage de l'infini potentiel à l'infini actuel ; Pascal se réfère à la récurrence quand il affirme que nous connaissons qu'il y a un infini et que nous ignorons sa nature.

L'homogénéité dimensionnelle



Intuitivement, la droite est un objet de dimension 1 et le plan est un objet de dimension 2. Ainsi une réunion quelconque de droites ne peut donner un plan ; c'est le principe d'homogénéité dimensionnelle. Réciproquement, suivant le même principe, si l'on divise une droite en segments, puis ces segments en segments plus petits, et ainsi de suite, on obtiendra toujours des segments, certes infinitésimaux.

Cette idée d'homogénéité se trouve exprimée, entre autres, chez John Wallis en 1671 : «Une quantité finie (ici le segment AB) peut être supposée divisible (par dichotomie) en un nombre de parties infiniment grand (c'est-à-dire plus grand que n'importe quel nombre fini donné) : il n'y a pas de raison de croire que cette division s'arrête (puisque, même à la dernière étape effectuée, un segment, aussi petit qu'il soit, aura encore deux moitiés).»

Comment expliquer qu'une grandeur étendue quelconque, lorsqu'on la partage, reste de même dimension ? Cette question est centrale dans les œuvres de Leibniz et de Cauchy. Kant l'aborde explicitement dans son approche du continu. Pour lui, une droite n'est pas un ensemble de points défini en compréhension, mais plutôt une grandeur étendue ; quant aux points eux-mêmes, ils marquent les extrémités des segments. L'analyse non standard de Robinson propose une réponse qui ne revendique pas de filiation avec l'analyse leibnizienne. En outre, Leibniz refusait l'infini actuel, alors que précisément l'analyse non standard ne prend son sens qu'en l'admettant.

Pour calculer l'aire délimitée par la courbe représentative de f , les ordonnées des points A et B et l'axe des abscisses, Pascal remplace l'aire S sous la courbe par la somme de tous les rectangles de base «infinitésimale». Il obtient ainsi l'encadrement de S : $(x_{i+1} - x_i)f(x_i) < S < (x_{i+1} - x_i)f(x_{i+1})$, les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ devenant, à chaque itération, plus petits. Selon le principe d'homogénéité de Wallis, la répétition infinie du procédé ne fait pas apparaître de segments non divisibles. Les infinitésimaux fabriqués sont de même nature dimensionnelle que la grandeur initiale, le segment AB. L'infinitésimal n'est pas un indivisible, comme le point, de dimension 0, qui marque ou repère les extrémités de l'intervalle.

Même si la différence $x_{i+1} - x_i$ tend vers 0, $[x_i, x_{i+1}]$ reste un segment de dimension 1. Ainsi, la somme des aires S_i des rectangles ne sera pas égale, même à la limite, à l'aire S cherchée, à moins de commettre systématiquement une erreur. En identifiant $x_{i+1} - x_i$ à l'indivisible – autrement dit, à un point – on pourrait obtenir une égalité, mais cela impliquerait de rompre avec le principe d'homogénéité dimensionnelle des figures de l'espace, les rectangles infinitésimaux devant, quant à eux, être identifiés, à la limite, à des droites.

Infinis et bijections

L'ensemble des entiers naturels est un avatar de l'infini actuel comme ensemble de cardinal transfini, appelé $\aleph_0$. L'approche ensembliste de l'infini repose sur la comparaison bijective, une méthode qui supplée l'itération.

On peut comparer des ensembles sans savoir compter. Un berger alphabète se contente de comparer une à une les brebis de deux troupeaux entrant dans une bergerie pour savoir quel troupeau est le plus gros. Il saura si les troupeaux ont le même nombre de bêtes ou non. Pour pouvoir opérer ce genre de bijection, les troupeaux doivent être effectivement présents et dans leur totalité. Le point de départ est donc la donnée *a priori* de ces ensembles, : il importe peu qu'on puisse les énumérer indépendamment.

Existe-t-il un unique infini actuel ? Y en a-t-il plusieurs et combien ? Un ensemble est infini s'il peut être mis en correspondance bijective avec une de ses parties. Ainsi, l'ensemble des entiers naturels est en bijection avec l'ensemble des nombres pairs ou, plus étonnant encore, avec l'ensemble des nombres premiers. Ces deux ensembles ont donc le même nombre d'éléments, le même cardinal.

D'un point de vue purement comptable ou, si l'on reprend l'argument euclidien déjà signalé, on a envie de dire que les nombres premiers sont en plus petit nombre que les entiers. Les nombres premiers constituent une sous-partie des entiers, et les entiers s'écrivent à partir des premiers (tout nombre se décompose, de façon unique, en produit de nombres premiers). En conséquence, dans la perspective ensembliste, «le tout n'est pas plus grand que la partie». Mieux, cette caractéristique fonde la différence entre fini et infini : dans le champ du fini elle est valable, dans le champ de l'infini elle cesse de l'être.

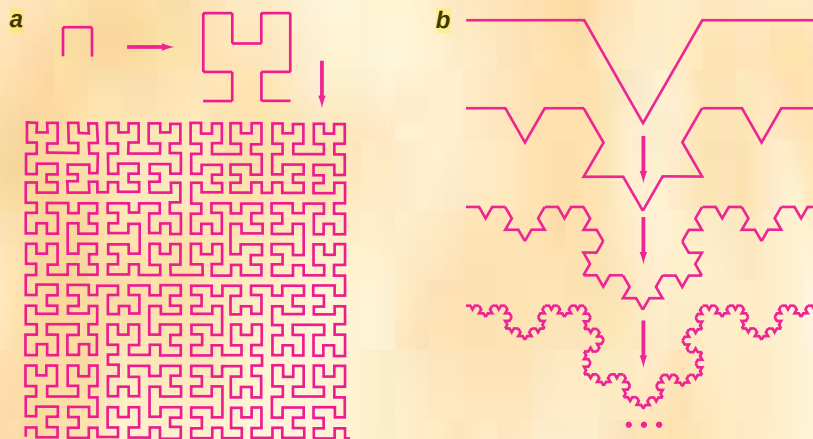
Les courbes continues sans dérivées

Afin de distinguer continuité et dérivabilité, le mathématicien allemand Karl Weierstrass construit, en 1872, une fonction définie par la série convergente :

$$f(x) = \sum a^n \cos(\pi b^n x),$$

fonction qui est continue en tout point et n'est dérivable en aucun point.

Cette fonction est difficilement visualisable. Peano construit une courbe (a) définie par une itération infinie, continue, non dérivable en aucun de ses points et qui, «à l'infini», remplit tout le plan de dimension 2. Von Koch élabore une courbe (b) de dimension non entière (4/3), la courbe en flocon de neige.



Y a-t-il un seul type d'infini actuel, celui associé aux entiers naturels pris dans leur ensemble? En d'autres termes, y a-t-il un unique cardinal transfini? Après avoir dépassé la notion d'illimité et accepté l'existence d'un infini actuel, l'unicité de l'infini paraît plutôt vraisemblable. Cantor anéanti cette intuition en établissant l'existence d'une échelle d'ensembles transfinis. Il indique même le chemin, la méthode dite de la diagonale, qui permet de passer d'un ensemble donné quelconque à un ensemble de cardinalité plus grande (voir *L'infini est-il paradoxal en mathématiques?*, pages 30 à 38).

Cantor se résout à comparer des ensembles donnés dans leur totalité actuelle. En définissant un ensemble, on se donne en même temps ses parties, ou plutôt l'ensemble de ses sous-ensembles, dont le cardinal est plus grand que celui de l'ensemble de départ. On dispose ainsi, outre la méthode de la diagonale, d'un procédé pour construire des ensembles transfinis de cardinalités croissantes.

L'infini actuel joue un rôle essentiel dans la création mathématique. Comme élément régulateur, il permet d'établir des propositions et des théorèmes qui, sans lui, n'auraient pas de sens. Et cela, même si, en pratique, le mathématicien se contente de deux infinis, le dénombrable et le continu.

Les démonstrations mathématiques qui recourent à l'infini actuel perdent le caractère constructif que confère l'usage du seul infini potentiel. Elles prennent simplement un caractère existentiel sans qu'on puisse construire explicitement l'objet dont elles démontrent l'existence. C'est le cas lorsqu'une

preuve utilise l'«axiome du choix», qui affirme l'existence d'une fonction de choix mais ne la caractérise pas, ou l'«existence d'une relation de bon ordre» qui en est une formulation équivalente. Un raisonnement par l'absurde est souvent le point de départ de ces preuves existentielles. Il ne faut toutefois pas perdre de vue que, l'existence d'un objet étant acquise, il existe peut-être une voie constructive, inaccessible temporairement au chercheur, et qui mène à cet objet. Il arrive au contraire, que l'on ait démontré qu'il est impossible de construire de tels ensembles, comme par exemple les ensembles hyperinfinis, qui n'en sont pas moins utiles, voire indispensables.

Prétention formelle ou artefact?

L'infini, actuel ou potentiel, n'existe pas dans la nature. L'homme, immergé dans cette nature, ne peut connaître que cette seule nature et ce qui la compose. À la rigueur lui concéderait-on l'infini potentiel, ou faux infini, perçu comme répétition sans limitation d'un processus de génération, par exemple des points sur une droite. Toutefois, il ne pourra prétendre donner ces points dans leur totalité actuelle.

Comment se représenter l'infini actuel? L'essentiel est moins de l'objectiver que de saisir ce qui lui est consubstantiel : les notions premières d'ensemble et d'application bijective entre ensembles.

Il importe de comprendre l'usage de ces notions fondamentales. Refuser le rôle conceptuel et régulateur des infinis – particulièrement celui d'infini

actuel –, c'est prendre le risque de s'enfermer dans un constructivisme fini, voire borné, quelquefois justifié à tort par l'omniprésence de l'ordinateur (voir *L'infini et l'univers des algorithmes*, pages 108 à 110). C'est aussi oublier que la théorie des fonctions récursives et de la calculabilité ont pour base conceptuelle la théorie des ensembles. Il en va de même pour le théorème d'arrêt d'Alan Turing et de ses conséquences sur le problème de la calculabilité.

L'infini, dans ses aspects potentiel et actuel, règle et structure l'activité mathématique. Faire des mathématiques, pensait Poincaré, c'est raconter quelque chose sur l'infini, alors même qu'aucun mathématicien n'a fait ou ne fera une démonstration ou un calcul infini...

Javier de LORENZO MARTÍNEZ est professeur de philosophie des sciences à l'Université de Valladolid.

Stan GIBILISCO, *Reaching for infinity*, Tab Books, 1990.

Infini des mathématiciens, infini des philosophes, sous la direction de F. Monnoyeur, Belin-Pour la Science, 1992.

D. HILBERT, *On the infinite*, sous la direction de P. Benacerraf et H. Putnam, *Philosophy of Mathematics : selected Readings*, Cambridge University Press, 1983.

A.-L. CAUCHY, *Analyse algébrique*, 1821, Éditions J. Gabay, 1989.

Ian STEWART, *Les mathématiques*, Belin-Pour la Science, 1989.

Paolo ZELLINI, *Breve Storia dell'Infinito*, Adelphi, Milan, 1980.