

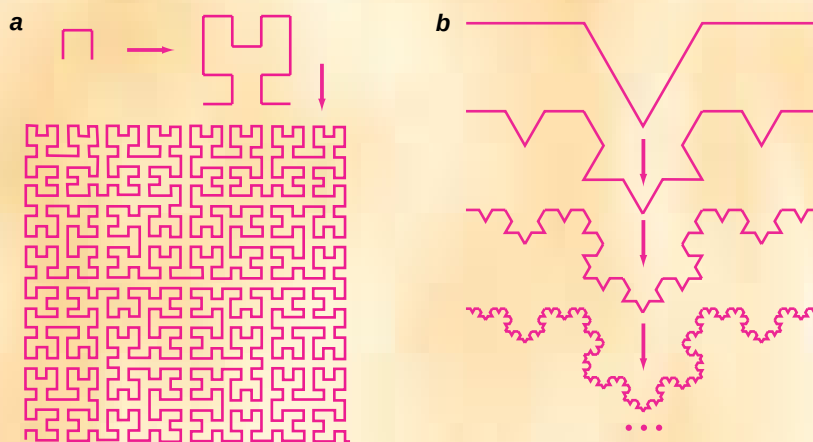
Les courbes continues sans dérivées

Afin de distinguer continuité et dérivabilité, le mathématicien allemand Karl Weierstrass construit, en 1872, une fonction définie par la série convergente :

$$f(x) = \sum a^n \cos(\pi b^n x),$$

fonction qui est continue en tout point et n'est dérivable en aucun point.

Cette fonction est difficilement visualisable. Peano construit une courbe (a) définie par une itération infinie, continue, non dérivable en aucun de ses points et qui, «à l'infini», remplit tout le plan de dimension 2. Von Koch élabore une courbe (b) de dimension non entière (4/3), la courbe en flocon de neige.



Y a-t-il un seul type d'infini actuel, celui associé aux entiers naturels pris dans leur ensemble? En d'autres termes, y a-t-il un unique cardinal transfini? Après avoir dépassé la notion d'illimité et accepté l'existence d'un infini actuel, l'unicité de l'infini paraît plutôt vraisemblable. Cantor anéanti cette intuition en établissant l'existence d'une échelle d'ensembles transfinis. Il indique même le chemin, la méthode dite de la diagonale, qui permet de passer d'un ensemble donné quelconque à un ensemble de cardinalité plus grande (voir *L'infini est-il paradoxal en mathématiques?*, pages 30 à 38).

Cantor se résout à comparer des ensembles donnés dans leur totalité actuelle. En définissant un ensemble, on se donne en même temps ses parties, ou plutôt l'ensemble de ses sous-ensembles, dont le cardinal est plus grand que celui de l'ensemble de départ. On dispose ainsi, outre la méthode de la diagonale, d'un procédé pour construire des ensembles transfinis de cardinalités croissantes.

L'infini actuel joue un rôle essentiel dans la création mathématique. Comme élément régulateur, il permet d'établir des propositions et des théorèmes qui, sans lui, n'auraient pas de sens. Et cela, même si, en pratique, le mathématicien se contente de deux infinis, le dénombrable et le continu.

Les démonstrations mathématiques qui recourent à l'infini actuel perdent le caractère constructif que confère l'usage du seul infini potentiel. Elles prennent simplement un caractère existentiel sans qu'on puisse construire explicitement l'objet dont elles démontrent l'existence. C'est le cas lorsqu'une

preuve utilise l'«axiome du choix», qui affirme l'existence d'une fonction de choix mais ne la caractérise pas, ou l'«existence d'une relation de bon ordre» qui en est une formulation équivalente. Un raisonnement par l'absurde est souvent le point de départ de ces preuves existentielles. Il ne faut toutefois pas perdre de vue que, l'existence d'un objet étant acquise, il existe peut-être une voie constructive, inaccessible temporairement au chercheur, et qui mène à cet objet. Il arrive au contraire, que l'on ait démontré qu'il est impossible de construire de tels ensembles, comme par exemple les ensembles hyperinfinis, qui n'en sont pas moins utiles, voire indispensables.

Prétention formelle ou artefact?

L'infini, actuel ou potentiel, n'existe pas dans la nature. L'homme, immergé dans cette nature, ne peut connaître que cette seule nature et ce qui la compose. À la rigueur lui concéderait-on l'infini potentiel, ou faux infini, perçu comme répétition sans limitation d'un processus de génération, par exemple des points sur une droite. Toutefois, il ne pourra prétendre donner ces points dans leur totalité actuelle.

Comment se représenter l'infini actuel? L'essentiel est moins de l'objectiver que de saisir ce qui lui est consubstantiel : les notions premières d'ensemble et d'application bijective entre ensembles.

Il importe de comprendre l'usage de ces notions fondamentales. Refuser le rôle conceptuel et régulateur des infinis – particulièrement celui d'infini

actuel –, c'est prendre le risque de s'enfermer dans un constructivisme fini, voire borné, quelquefois justifié à tort par l'omniprésence de l'ordinateur (voir *L'infini et l'univers des algorithmes*, pages 108 à 110). C'est aussi oublier que la théorie des fonctions récursives et de la calculabilité ont pour base conceptuelle la théorie des ensembles. Il en va de même pour le théorème d'arrêt d'Alan Turing et de ses conséquences sur le problème de la calculabilité.

L'infini, dans ses aspects potentiel et actuel, règle et structure l'activité mathématique. Faire des mathématiques, pensait Poincaré, c'est raconter quelque chose sur l'infini, alors même qu'aucun mathématicien n'a fait ou ne fera une démonstration ou un calcul infini...

Javier de LORENZO MARTÍNEZ est professeur de philosophie des sciences à l'Université de Valladolid.

Stan GIBILISCO, *Reaching for infinity*, Tab Books, 1990.

Infini des mathématiciens, infini des philosophes, sous la direction de F. Monnoyeur, Belin-Pour la Science, 1992.

D. HILBERT, *On the infinite*, sous la direction de P. Benacerraf et H. Putnam, *Philosophy of Mathematics : selected Readings*, Cambridge University Press, 1983.

A.-L. CAUCHY, *Analyse algébrique*, 1821, Éditions J. Gabay, 1989.

Ian STEWART, *Les mathématiques*, Belin-Pour la Science, 1989.

Paolo ZELLINI, *Breve Storia dell'Infinito*, Adelphi, Milan, 1980.

L'infini est-il paradoxal en mathématiques?

JEAN-PAUL DELAHAYE

Pour résoudre le paradoxe du tout et des parties et affronter l'hypothèse du continu, notre idée de l'infini actuel doit évoluer ; aujourd'hui encore, nous découvrons de nouveaux infinis.



1. LE PARADOXE DE L'HÔTEL DE HILBERT

L'histoire suivante illustre pourquoi des ensembles infinis actuels ont longtemps paru absurdes. Un hôtel infini dont les chambres sont numérotées par les entiers $0, 1, 2, 3, \dots$ est complet pour la nuit (un client occupe chaque chambre). Arrive un client : «Pas de problème, lui répond le responsable de l'accueil. Installez-vous dans la chambre 0. Je demande au client de la chambre 0 de passer dans la chambre 1, à celui de la chambre 1 de passer dans la chambre 2, etc.» L'accueil dispose bien sûr d'un téléphone spécial qui permet de téléphoner simultanément à toutes les chambres en demandant au client de la chambre n de passer en $n + 1$. Le nouveau client a pu être reçu. Dix minutes plus tard arrive un car (infini, bien sûr) de nouveaux clients qui demandent à passer la nuit dans l'hôtel. «Pas de problème», répond le responsable de l'accueil au chauffeur du car, et il utilise son téléphone

pour demander au client de la chambre n de passer dans la chambre $2n$. Il indique alors au chauffeur du car que le voyageur numéro i de son autocar peut disposer de la chambre $2i + 1$ (qui est effectivement libre, puisque toutes les chambres de numéro impair ont été libérées). Une demi-heure plus tard arrive un groupe plus important constitué d'une infinité de cars, chacun ayant à leur bord une infinité de passagers. «Pas de problème, je vous arrange ça», répond le responsable de l'accueil. Il téléphone au client de la chambre i de passer dans la chambre $2i + 1$ (ce qui libère toutes les chambres ayant un numéro pair) et donne la consigne suivante au responsable du groupe d'autocars : le passager numéro i du bus j doit occuper la chambre $2^{j+1}(2i + 1)$. Tout se passe bien, et jamais deux voyageurs différents ne se sont vus attribuer la même chambre.

L'infini, c'est long, surtout vers la fin. (Alphonse Allais)

L'infini mathématique peut-il être maîtrisé? Autrement dit, peut-on faire une théorie de l'infini qui évite tout paradoxe et toute incohérence? Pour répondre à ces questions, nous distinguerons paradoxes et situations logiquement peu satisfaisantes.

Un paradoxe au sein d'une théorie est la possibilité de démontrer une chose et son contraire. Dans cette situation, tout en n'utilisant que des raisonnements fondés sur les axiomes de la théorie, nous pouvons en tirer une affirmation *A* et l'affirmation contraire *Non A*. En mathématiques, les paradoxes (on les dénomme aussi contradictions, inconsistances, antinomies) sont inacceptables, et les logiciens font tout pour les éviter.

Aujourd'hui, les mathématiciens connaissent toutes sortes de moyens pour contourner les paradoxes au sein des théories mathématiques de l'infini. La question subsiste : ces moyens atteignent-ils leurs fins?

Une situation logiquement insatisfaisante apparaît lorsqu'une théorie nous permet d'énoncer des propriétés étonnantes, parfois opposées à notre attente, sans toutefois qu'une véritable contradiction apparaisse. Nous pouvons alors continuer à développer la théorie en espérant que la difficulté sera résolue plus tard. Parfois nous finissons par accepter la situation jugée gênante, et ce qui était perçu comme douteux devient alors banal, comme si une métamorphose de nos conceptions profondes s'était produite.

Quelle est aujourd'hui la situation entre paradoxes infinis, situations insatisfaisantes tolérées et digérées?

Pour le savoir, nous allons passer en revue quelques paradoxes de l'infini mathématique, paradoxes qui décident de son histoire. À chaque fois, nous évoquerons les solutions mathématiques avancées et nous nous interrogerons pour savoir si ces solutions sont satisfaisantes en tout point ou si, au contraire, elles laissent des zones d'ombre qui marquent la limite de cette prétendue maîtrise de l'infini par le formalisme des mathématiques modernes.

L'infini n'a pas été accepté facilement, et on a longtemps espéré pou-

voir s'en passer. Aristote refusait l'infini actuel (ou infini actuel), c'est-à-dire pris d'un seul tenant. Il déniait toute existence physique à l'infini, mais lui reconnaissait une certaine existence mathématique, car il lui semblait nécessaire d'envisager des grandeurs de plus en plus grandes : chaque entier est suivi d'un autre ; aucun point n'est le dernier point d'une droite. Les mathématiciens ont tenté de se contenter de

cet infini potentiel ou en tout cas de s'y ramener, en évitant autant que possible l'infini actuel.

L'impensable infini actuel

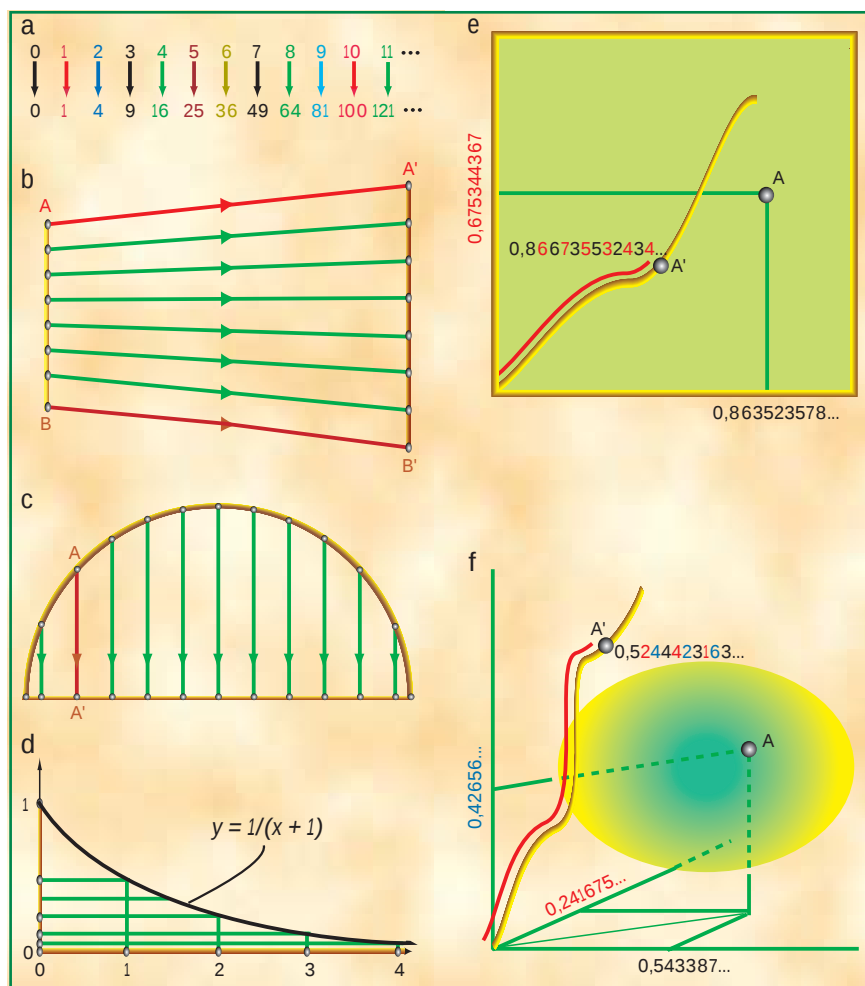
Euclide, par exemple, n'énonce pas qu'il existe une infinité de nombres premiers, mais que «les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité de nombres premiers proposée», ce qu'il démontre en établissant que, si



Bernard Bolzano



Carl Friedrich Gauss



2. LES PARADOXES DE LA RÉFLEXIVITÉ : si les ensembles infinis existent en acte et non pas potentiellement, comme les ensembles que l'on complète petit à petit, alors l'ensemble des carrés est aussi grand que l'ensemble des nombres entiers : on peut associer chaque élément de l'un à un élément de l'autre (a). Similairement (b), le segment *AB* est aussi «grand» que le segment *A'B'*, et le demi-périmètre d'un cercle est «égal» à son diamètre (c). On peut aussi mettre en correspondance (d) les points réels d'un segment et les points d'une demi-droite infinie par la relation $y = 1/(x + 1)$. Similairement, Cantor (il fut très surpris de cette possibilité) a mis en relation l'ensemble des points d'une surface plane avec les points d'une courbe quelconque. Pour cela, on associe aux deux coordonnées d'un point une valeur obtenue en intercalant les décimales des deux nombres représentant les coordonnées, et l'on associe à cette valeur un point de la courbe dont la distance à l'origine (prise le long de la courbe) est égale à la valeur obtenue (e). De la même façon, on associe les points d'un volume aux points d'une courbe (f).