

L'infini, c'est long, surtout vers la fin. (Alphonse Allais)

L'infini mathématique peut-il être maîtrisé? Autrement dit, peut-on faire une théorie de l'infini qui évite tout paradoxe et toute incohérence? Pour répondre à ces questions, nous distinguerons paradoxes et situations logiquement peu satisfaisantes.

Un paradoxe au sein d'une théorie est la possibilité de démontrer une chose et son contraire. Dans cette situation, tout en n'utilisant que des raisonnements fondés sur les axiomes de la théorie, nous pouvons en tirer une affirmation *A* et l'affirmation contraire *Non A*. En mathématiques, les paradoxes (on les dénomme aussi contradictions, inconsistances, antinomies) sont inacceptables, et les logiciens font tout pour les éviter.

Aujourd'hui, les mathématiciens connaissent toutes sortes de moyens pour contourner les paradoxes au sein des théories mathématiques de l'infini. La question subsiste : ces moyens atteignent-ils leurs fins?

Une situation logiquement insatisfaisante apparaît lorsqu'une théorie nous permet d'énoncer des propriétés étonnantes, parfois opposées à notre attente, sans toutefois qu'une véritable contradiction apparaisse. Nous pouvons alors continuer à développer la théorie en espérant que la difficulté sera résolue plus tard. Parfois nous finissons par accepter la situation jugée gênante, et ce qui était perçu comme douteux devient alors banal, comme si une métamorphose de nos conceptions profondes s'était produite.

Quelle est aujourd'hui la situation entre paradoxes infinis, situations insatisfaisantes tolérées et digérées?

Pour le savoir, nous allons passer en revue quelques paradoxes de l'infini mathématique, paradoxes qui décident de son histoire. À chaque fois, nous évoquerons les solutions mathématiques avancées et nous nous interrogerons pour savoir si ces solutions sont satisfaisantes en tout point ou si, au contraire, elles laissent des zones d'ombre qui marquent la limite de cette prétendue maîtrise de l'infini par le formalisme des mathématiques modernes.

L'infini n'a pas été accepté facilement, et on a longtemps espéré pou-



Bernard Bolzano

voir s'en passer. Aristote refusait l'infini actuel (ou infini actuel), c'est-à-dire pris d'un seul tenant. Il déniait toute existence physique à l'infini, mais lui reconnaissait une certaine existence mathématique, car il lui semblait nécessaire d'envisager des grandeurs de plus en plus grandes : chaque entier est suivi d'un autre ; aucun point n'est le dernier point d'une droite. Les mathématiciens ont tenté de se contenter de

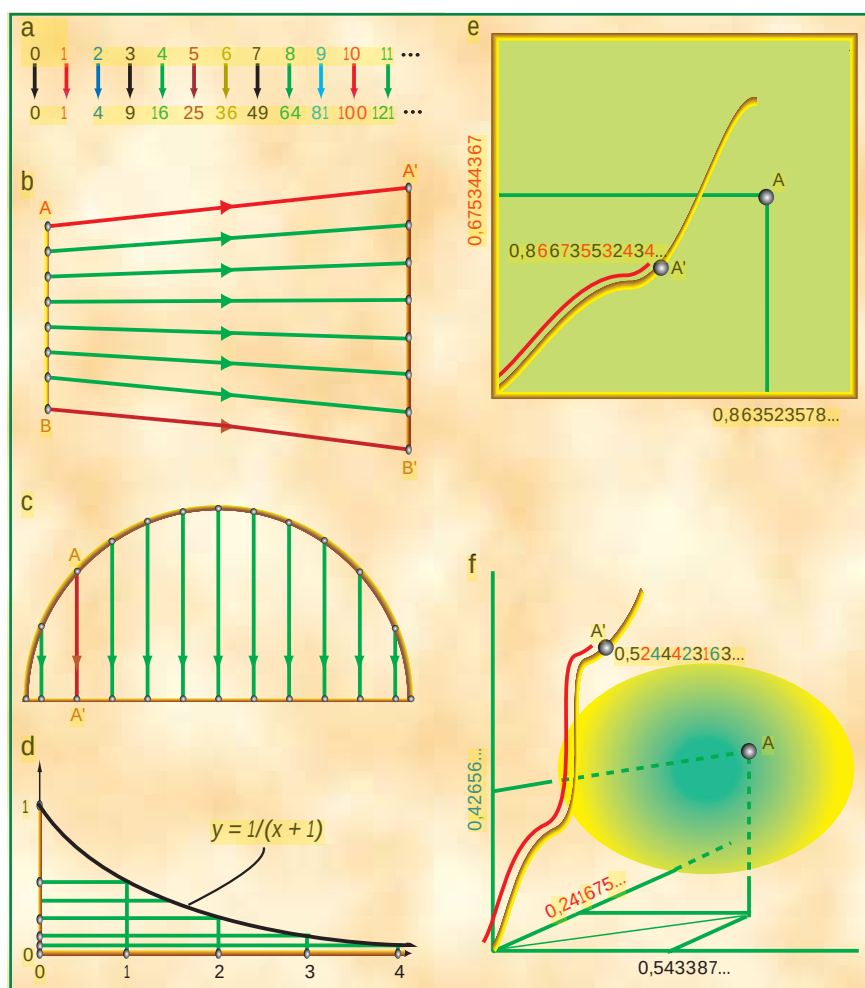
cet infini potentiel ou en tout cas de s'y ramener, en évitant autant que possible l'infini actuel.

## L'impensable infini actuel

Euclide, par exemple, n'énonce pas qu'il existe une infinité de nombres premiers, mais que «les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité de nombres premiers proposée», ce qu'il démontre en établissant que, si



Carl Friedrich Gauss



**2. LES PARADOXES DE LA RÉFLEXIVITÉ :** si les ensembles infinis existent en acte et non pas potentiellement, comme les ensembles que l'on complète petit à petit, alors l'ensemble des carrés est aussi grand que l'ensemble des nombres entiers : on peut associer chaque élément de l'un à un élément de l'autre (a). Similairement (b), le segment *AB* est aussi «grand» que le segment *A'B'*, et le demi-périmètre d'un cercle est «égal» à son diamètre (c). On peut aussi mettre en correspondance (d) les points réels d'un segment et les points d'une demi-droite infinie par la relation  $y = 1/(x + 1)$ . Similairement, Cantor (il fut très surpris de cette possibilité) a mis en relation l'ensemble des points d'une surface plane avec les points d'une courbe quelconque. Pour cela, on associe aux deux coordonnées d'un point une valeur obtenue en intercalant les décimales des deux nombres représentant les coordonnées, et l'on associe à cette valeur un point de la courbe dont la distance à l'origine (prise le long de la courbe) est égale à la valeur obtenue (e). De la même façon, on associe les points d'un volume aux points d'une courbe (f).