

L'infini, c'est long, surtout vers la fin. (Alphonse Allais)

L'infini mathématique peut-il être maîtrisé? Autrement dit, peut-on faire une théorie de l'infini qui évite tout paradoxe et toute incohérence? Pour répondre à ces questions, nous distinguerons paradoxes et situations logiquement peu satisfaisantes.

Un paradoxe au sein d'une théorie est la possibilité de démontrer une chose et son contraire. Dans cette situation, tout en n'utilisant que des raisonnements fondés sur les axiomes de la théorie, nous pouvons en tirer une affirmation *A* et l'affirmation contraire *Non A*. En mathématiques, les paradoxes (on les dénomme aussi contradictions, inconsistances, antinomies) sont inacceptables, et les logiciens font tout pour les éviter.

Aujourd'hui, les mathématiciens connaissent toutes sortes de moyens pour contourner les paradoxes au sein des théories mathématiques de l'infini. La question subsiste : ces moyens atteignent-ils leurs fins?

Une situation logiquement insatisfaisante apparaît lorsqu'une théorie nous permet d'énoncer des propriétés étonnantes, parfois opposées à notre attente, sans toutefois qu'une véritable contradiction apparaisse. Nous pouvons alors continuer à développer la théorie en espérant que la difficulté sera résolue plus tard. Parfois nous finissons par accepter la situation jugée gênante, et ce qui était perçu comme douteux devient alors banal, comme si une métamorphose de nos conceptions profondes s'était produite.

Quelle est aujourd'hui la situation entre paradoxes infinis, situations insatisfaisantes tolérées et digérées?

Pour le savoir, nous allons passer en revue quelques paradoxes de l'infini mathématique, paradoxes qui décident de son histoire. À chaque fois, nous évoquerons les solutions mathématiques avancées et nous nous interrogerons pour savoir si ces solutions sont satisfaisantes en tout point ou si, au contraire, elles laissent des zones d'ombre qui marquent la limite de cette prétendue maîtrise de l'infini par le formalisme des mathématiques modernes.

L'infini n'a pas été accepté facilement, et on a longtemps espéré pou-

voir s'en passer. Aristote refusait l'infini actuel (ou infini actuel), c'est-à-dire pris d'un seul tenant. Il déniait toute existence physique à l'infini, mais lui reconnaissait une certaine existence mathématique, car il lui semblait nécessaire

d'envisager des grandeurs de plus en plus grandes : chaque entier est suivi d'un autre ; aucun point n'est le dernier point d'une droite. Les mathématiciens ont tenté de se contenter de

cet infini potentiel ou en tout cas de s'y ramener, en évitant autant que possible l'infini actuel.

L'impensable infini actuel

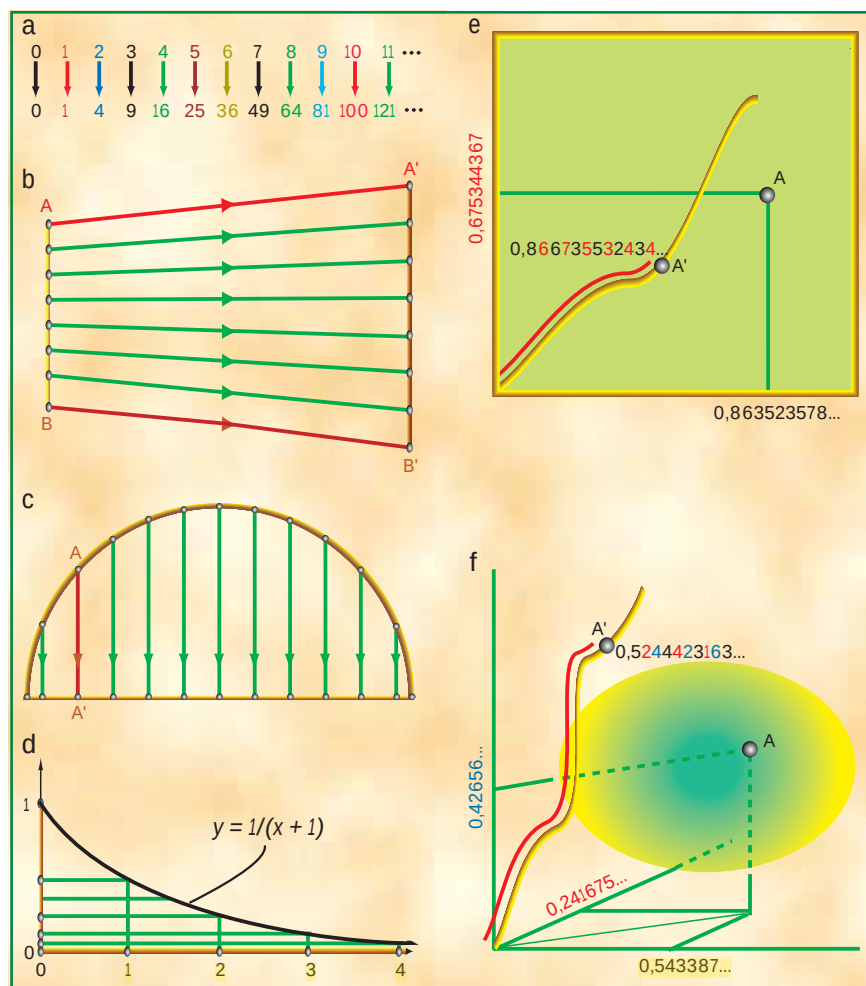
Euclide, par exemple, n'énonce pas qu'il existe une infinité de nombres premiers, mais que «les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité de nombres premiers proposée», ce qu'il démontre en établissant que, si



Bernard Bolzano



Carl Friedrich Gauss



2. LES PARADOXES DE LA RÉFLEXIVITÉ : si les ensembles infinis existent en acte et non pas potentiellement, comme les ensembles que l'on complète petit à petit, alors l'ensemble des carrés est aussi grand que l'ensemble des nombres entiers : on peut associer chaque élément de l'un à un élément de l'autre (a). Similairement (b), le segment AB est aussi «grand» que le segment $A'B'$, et le demi-périmètre d'un cercle est «égal» à son diamètre (c). On peut aussi mettre en correspondance (d) les points réels d'un segment et les points d'une demi-droite infinie par la relation $y = 1/(x+1)$. Similairement, Cantor (il fut très surpris de cette possibilité) a mis en relation l'ensemble des points d'une surface plane avec les points d'une courbe quelconque. Pour cela, on associe aux deux coordonnées d'un point une valeur obtenue en intercalant les décimales des deux nombres représentant les coordonnées, et l'on associe à cette valeur un point de la courbe dont la distance à l'origine (prise le long de la courbe) est égale à la valeur obtenue (e). De la même façon, on associe les points d'un volume aux points d'une courbe (f).



Richard Dedekind

des nombres premiers sont donnés par avance $p_1, p_2, \dots, p_k$, on peut en construire un (le plus petit diviseur premier de $p_1 p_2 \dots p_k + 1$) qui sera différent de tous ceux

qui étaient donnés.

La raison profonde de cette méfiance vis-à-vis de l'infini actuel est le paradoxe de la réflexivité : si un ensemble est infini, il est possible de le mettre en correspondance un à un – on dit aussi bijective, ou biunivoque – avec une de ses parties propres (c'est-à-dire différente de lui-même). La relation qui associe n^2 au nombre n , par exemple, établit une correspondance bijective entre les nombres entiers $0, 1, 2, 3, \dots$ et les nombres pairs $0, 1, 4, 9, \dots$ lesquels sont pourtant moins nombreux.

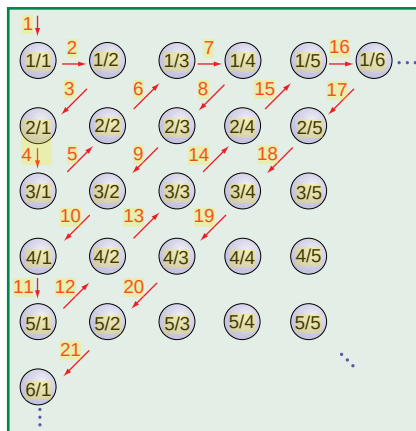
Le même problème surgit à propos du segment des nombres réels compris entre 0 et 1 (noté aujourd'hui $[0,1]$) et celui des nombres réels compris entre 0 et 2 (la correspondance bijective est celle qui, à x , associe $2x$) ; généralisant, on met sans aucune peine en correspondance bijective deux segments de droite AB et $A'B'$ quelconques. Plus gênante encore la correspondance qui à x associe $1/(x+1)$, car elle met en correspondance bijective l'intervalle des nombres réels compris entre 0 et 1, noté $[0, +1[$, et l'ensemble des nombres réels positifs, noté $[0, +\infty[$.

En quoi le paradoxe de la réflexivité est-il un paradoxe, nous demandons-nous aujourd'hui ? C'est un paradoxe, car le principe du tout et de la partie qui indique que «le tout est plus gros que la partie» y est mis en défaut. On n' imagine pas de renoncer à une vérité aussi claire. On craint

que notre raison ne puisse résister à la remise en cause d'un tel principe immédiat. Reconsidérer ce principe du tout et de la partie apparaîtrait d'une audace insensée, et c'est pourquoi on a bien souvent préféré conclure que seul un être infini lui-même, Dieu par exemple, peut penser l'infini. L'Église s'opposait d'ailleurs



Gottfried Leibniz



3. L'ENSEMBLE INFINI des nombres rationnels (c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui sont le quotient de deux nombres entiers) semble supérieur à l'ensemble des nombres entiers. Cantor démontra que l'on peut appairer les nombres rationnels dans un réseau carré et associer un nombre entier à chaque nombre rationnel en traçant le chemin coloré représenté sur la figure. L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable !

à toute tentative des hommes de penser l'infini actuel. Saint Thomas d'Aquin considérait que quiconque pensait concevoir l'infini actuel entraînait en concurrence avec la nature unique et absolument infinie de Dieu.

Il faudra deux mille ans pour franchir cet obstacle. Le principe du tout et de la partie qui, à vrai dire, n'est guère utile en mathématiques, devait être reconsidéré : ce principe éminemment paradoxal empêchait tout progrès dans la compréhension de l'infini actuel.

Cette audace sera le fait du philosophe mathématicien tchèque Bernhard Bolzano (1781-1848), dont l'ouvrage *Les paradoxes de l'infini*, publié après sa mort en 1851, envisage des



Georg Cantor

correspondances bijectives entre une totalité et l'une de ses parties propres, sans s'en émouvoir.

Au contraire Bolzano propose de voir dans ces correspondances la caractéristique des totalités infinies, ce qui revient à abandonner, pour les totalités infinies, le principe du tout et de la partie. Plus tard, le mathématicien allemand Richard Dedekind (1831-1916) définira qu'un ensemble est infini s'il peut être mis en bijection avec une de ses parties propres : aujourd'hui, on adopte souvent cette définition en théorie des ensembles pour définir un ensemble infini.

Avant Bolzano, G. Leibniz avait défendu l'idée de l'infini actuel : «Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la perfection de son Auteur.» (Leibniz, *Opera omnia studio Ludov. Dutens*, tome II, partie X.) Bolzano place cette citation en exergue de son ouvrage révolutionnaire.

Cependant l'infini actuel que défend Leibniz est différent de celui des totalités infinies considérées actuel dans le problème du paradoxe de la réflexivité. Leibniz défend plutôt un infini philosophique, celui du monde physique pris comme un tout. L'infiniment petit (qui est confronté

4. CANTOR a prouvé qu'il existe des infinis plus grands que l'infini dénombrable (ensemble dont on peut numéroté tous les éléments). Examinons d'abord un ensemble fini comportant trois éléments : nous dénombrons huit sous-ensembles (2^3) distincts (a). Pour un ensemble de N éléments, il existe 2^N sous ensembles différents (chaque élément peut être, ou non, partie de l'ensemble). Construisons les sous-ensembles d'un ensemble infini dénombrable d'éléments (b). Nous démontrons par l'absurde qu'il est impossible de numéroté chaque élément de cet ensemble, donc que l'ensemble infini des sous-ensembles d'un ensemble dénombrable n'est pas dénombrable. Supposons que cela soit possible. Chaque sous-ensemble est représenté par un ensemble de cartes, chaque sous-ensemble s'étendant à l'infini vers la droite. Nous numérotions chaque sous-ensemble de haut en bas. Les numérotions-nous ainsi tous ? Non. Examinons le sous-ensemble constitué par les cartes de la diagonale et supposons que nous avons retourné toutes les cartes : il n'est pas identique au premier sous-ensemble, car la première carte est différente ; il n'est pas identique au second, car la seconde carte, retournée, est différente, et ainsi de suite. Le n -ième sous-ensemble diffère du nouveau sous-ensemble, car la carte numéro n est retournée. Nous avons ainsi confectionné un sous-ensemble qui ne fait pas partie de la liste. Donc l'ensemble des sous-ensembles n'est pas numérotable... Cette preuve diagonale de Cantor sert à prouver que l'ensemble des nombres réels (les nombres rationnels et les nombres irrationnels) n'est pas dénombrable. Examinons (c) les nombres réels du segment de longueur unité : la distance de chaque point à l'origine est écrite sous forme binaire $0,011010010111\dots$ Le point dont la distance à l'origine est mesurée par les chiffres inversés de la diagonale ne figure pas dans l'énumération, et il est donc impossible de numéroté tous les nombres réels du segment unité... L'ensemble des nombres réels à la puissance $2^{\aleph_0}$ est un infini plus grand que l'infini dénombrable.