



Richard Dedekind

des nombres premiers sont donnés par avance $p_1, p_2, \dots, p_k$, on peut en construire un (le plus petit diviseur premier de $p_1 p_2 \dots p_k + 1$) qui sera différent de tous ceux qui étaient donnés.

La raison profonde de cette méfiance vis-à-vis de l'infini actuel est le paradoxe de la réflexivité : si un ensemble est infini, il est possible de le mettre en correspondance un à un – on dit aussi bijective, ou biunivoque – avec une de ses parties propres (c'est-à-dire différente de lui-même). La relation qui associe n^2 au nombre n , par exemple, établit une correspondance bijective entre les nombres entiers $0, 1, 2, 3, \dots$ et les nombres pairs $0, 1, 4, 9, \dots$ lesquels sont pourtant moins nombreux.

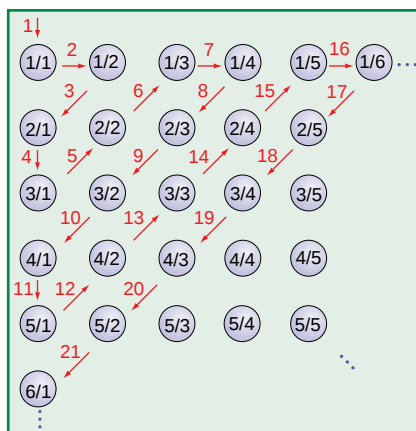
Le même problème surgit à propos du segment des nombres réels compris entre 0 et 1 (noté aujourd'hui $[0,1]$) et celui des nombres réels compris entre 0 et 2 (la correspondance bijective est celle qui, à x , associe $2x$) ; généralisant, on met sans aucune peine en correspondance bijective deux segments de droite AB et $A'B'$ quelconques. Plus gênante encore la correspondance qui à x associe $1/(x+1)$, car elle met en correspondance bijective l'intervalle des nombres réels compris entre 0 et 1, noté $[0, +1[$, et l'ensemble des nombres réels positifs, noté $[0, +\infty[$.

En quoi le paradoxe de la réflexivité est-il un paradoxe, nous demandons-nous aujourd'hui ? C'est un paradoxe, car le principe du tout et de la partie qui indique que «le tout est plus gros que la partie» y est mis en défaut. On n' imagine pas de renoncer à une vérité aussi claire. On craint

que notre raison ne puisse résister à la remise en cause d'un tel principe immédiat. Reconsidérer ce principe du tout et de la partie apparaîtrait d'une audace insensée, et c'est pourquoi on a bien souvent préféré conclure que seul un être infini lui-même, Dieu par exemple, peut penser l'infini. L'Église s'opposait d'ailleurs



Gottfried Leibniz



3. L'ENSEMBLE INFINI des nombres rationnels (c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui sont le quotient de deux nombres entiers) semble supérieur à l'ensemble des nombres entiers. Cantor démontra que l'on peut apparier les nombres rationnels dans un réseau carré et associer un nombre entier à chaque nombre rationnel en traçant le chemin coloré représenté sur la figure. L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable !

à toute tentative des hommes de penser l'infini actuel. Saint Thomas d'Aquin considérait que quiconque pensait concevoir l'infini actuel entraînait en concurrence avec la nature unique et absolument infinie de Dieu.

Il faudra deux mille ans pour franchir cet obstacle. Le principe du tout et de la partie qui, à vrai dire, n'est guère utile en mathématiques, devait être reconsidéré : ce principe éminemment paradoxal empêchait tout progrès dans la compréhension de l'infini actuel.

Cette audace sera le fait du philosophe mathématicien tchèque Bernhard Bolzano (1781-1848), dont l'ouvrage *Les paradoxes de l'infini*, publié après sa mort en 1851, envisage des

correspondances bijectives entre une totalité et l'une de ses parties propres, sans s'en émouvoir.

Au contraire Bolzano propose de voir dans ces correspondances la caractéristique des totalités infinies, ce qui revient à abandonner, pour les totalités infinies, le principe du tout et de la partie. Plus tard, le mathématicien allemand Richard Dedekind (1831-1916) définira qu'un ensemble est infini s'il peut être mis en bijection avec une de ses parties propres : aujourd'hui, on adopte souvent cette définition en théorie des ensembles pour définir un ensemble infini.

Avant Bolzano, G. Leibniz avait défendu l'idée de l'infini actuel : «Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la perfection de son Auteur.» (Leibniz, *Opera omnia studio Ludov. Dutens*, tome II, partie X.) Bolzano place cette citation en exergue de son ouvrage révolutionnaire.

Cependant l'infini actuel que défend Leibniz est différent de celui des totalités infinies considérées actuel dans le problème du paradoxe de la réflexivité. Leibniz défend plutôt un infini philosophique, celui du monde physique pris comme un tout. L'infiniment petit (qui est confronté



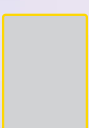
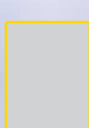
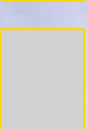
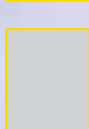
Georg Cantor

4. CANTOR a prouvé qu'il existe des infinis plus grands que l'infini dénombrable (ensemble dont on peut numéroté tous les éléments). Examinons d'abord un ensemble fini comportant trois éléments : nous dénombrons huit sous-ensembles (2^3) distincts (a). Pour un ensemble de N éléments, il existe 2^N sous ensembles différents (chaque élément peut être, ou non, partie de l'ensemble). Construisons les sous-ensembles d'un ensemble infini dénombrable d'éléments (b). Nous démontrons par l'absurde qu'il est impossible de numéroté chaque élément de cet ensemble, donc que l'ensemble infini des sous-ensembles d'un ensemble dénombrable n'est pas dénombrable. Supposons que cela soit possible. Chaque sous-ensemble est représenté par un ensemble de cartes, chaque sous-ensemble s'étendant à l'infini vers la droite. Nous numérotions chaque sous-ensemble de haut en bas. Les numérotions nous ainsi tous ? Non. Examinons le sous-ensemble constitué par les cartes de la diagonale et supposons que nous avons retourné toutes les cartes : il n'est pas identique au premier sous-ensemble, car la première carte est différente ; il n'est pas identique au second, car la seconde carte, retournée, est différente, et ainsi de suite. Le n -ième sous-ensemble diffère du nouveau sous-ensemble, car la carte numéro n est retournée. Nous avons ainsi confectionné un sous-ensemble qui ne fait pas partie de la liste. Donc l'ensemble des sous-ensembles n'est pas numérotable... Cette preuve diagonale de Cantor sert à prouver que l'ensemble des nombres réels (les nombres rationnels et les nombres irrationnels) n'est pas dénombrable. Examinons (c) les nombres réels du segment de longueur unité : la distance de chaque point à l'origine est écrite sous forme binaire $0,011010010111\dots$ Le point dont la distance à l'origine est mesurée par les chiffres inversés de la diagonale ne figure pas dans l'énumération, et il est donc impossible de numéroté tous les nombres réels du segment unité... L'ensemble des nombres réels à la puissance $2^{\aleph_0}$ est un infini plus grand que l'infini dénombrable.

a

b

	1	2	3	4	5	...
1						...
2						...
3						...
4						...
5						...
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

c

	1	2	3	4	5	...
1	0	0	1	1	1	...
2	1	1	0	0	1	...
3	0	0	1	0	1	...
4	1	0	1	0	0	...
5	0	0	1	1	1	...
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	



Leopold Kronecker

à d'autres paradoxes qu'on utilise parfois pour attaquer les nouvelles méthodes de calcul que Leibniz défend) ne saura vraiment trouver une place confortable et assurée en mathématiques qu'en se débarrassant de son objectualité, c'est-à-dire quand on ne parlera plus des infiniment petits comme d'objets mathématiques, mais comme de limites.

Les mathématiciens du XX^e siècle sauront redonner aux infiniment petits un statut d'objet authentique. La méthode utilisée au XIX^e siècle pour rendre rigoureux le calcul infinitésimal est un renoncement à l'infini actuel, auquel on substitue un infini potentiel, celui de quantités qui s'approchent de plus en plus de leur limite.

Le prince des mathématiciens, Gauss (1777-1855), exprimant le sentiment partagé par la communauté mathématique de son époque, écrivait par exemple : «Je conteste qu'on utilise un objet infini comme un tout complet ; en mathématiques, cette opération est interdite ; l'infini n'est qu'une façon de parler.»

On peut donc affirmer que, malgré quelques tentatives diverses pour fonder une science mathématique de l'infini, c'est Bolzano et nul autre qui, en affrontant le paradoxe de la réflexivité, a le premier ouvert la voie à ce qui aujourd'hui est notre conception de l'infini mathématique pris comme un tout.

La solution actuelle du paradoxe de la réflexivité

La solution du paradoxe de la réflexivité proposée par Bolzano et rendue parfaitement claire par le développement ultérieur de la théorie des ensembles en termes modernes s'énonce ainsi : la relation «est contenu dans» entre ensembles ne doit pas être confondue avec la relation «avoir une taille plus petite que» : les nombres carrés sont contenus dans les nombres entiers, mais comme totalité ils ont même taille. Il est bien vrai que, si l'ensemble A est contenu dans l'ensemble B, alors la taille de A est inférieure ou égale à celle de B, mais elle peut être égale.

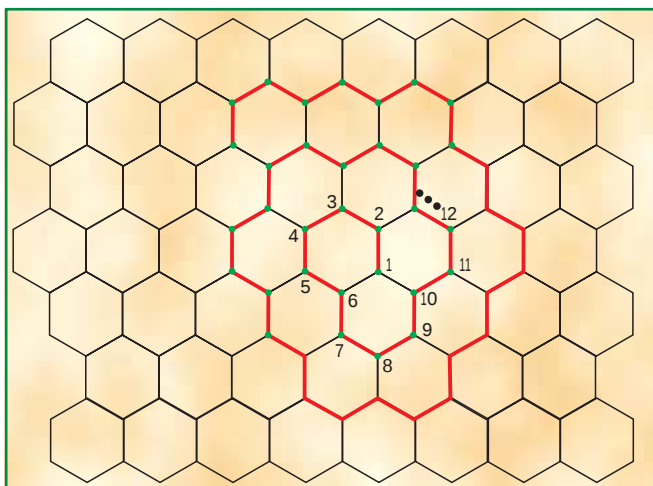
Au lieu de «taille», on emploie souvent le terme technique de «cardinal», mais c'est sans importance, l'idée unique de la solution du paradoxe est d'admettre qu'un ensemble A strictement contenu dans un ensemble B a parfois la même taille. Il faut accepter ce qui paraissait paradoxal et décréter que ça ne l'est plus par une opération de dédoublement de concept : «être contenu dans» n'est pas «avoir une taille plus petite que».

Ce pas franchi, n'allons-nous pas tomber sur des contradictions qui conduiraient à une mathématique inconsistante, et donc intenable ? Le jeu en vaut certainement la chandelle, mais il n'est pas facile à mener et ce sont d'autres que Bolzano qui le joueront, car, il faut bien le dire, Bolzano, comme essoufflé par l'audace de sa proposition initiale, ne mène pas le développement mathématique qu'elle appelle pourtant.

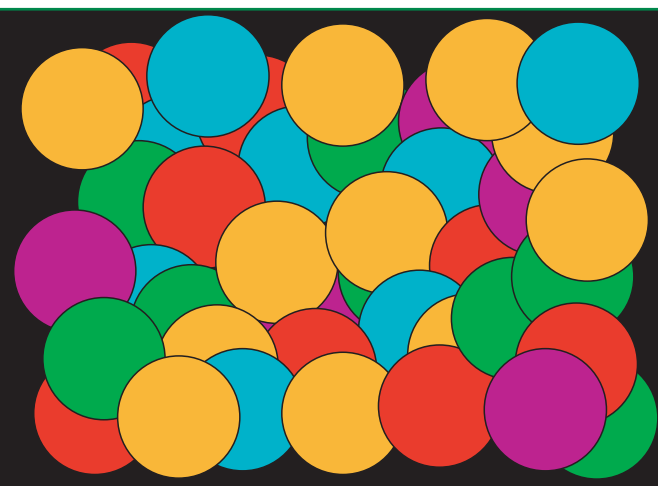
L'exploration mathématique de l'algèbre des bijections sera longue et tortueuse, et Bolzano inaugure une période d'instabilité grave et de controverses parfois acerbes. Le travail principal sera fait par le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918), qui découvrira de nombreuses propriétés des tailles d'ensembles infinis qui lui sembleront souvent à la limite du paradoxe. Cantor distinguera les tailles des ensembles. Si le contraire avait été vrai – c'est-à-dire si chaque ensemble infini avait pu être mis en bijection avec chaque autre –, la théorie de la taille des ensembles infinis aurait singulièrement manqué d'intérêt ! Cantor s'aperçoit, en 1874, que l'ensemble des nombres réels ne peut pas être mis en bijection avec l'ensemble des nombres entiers : il est de taille strictement plus grande. Le raisonnement diagonal que Cantor découvre en simplifiant son raisonnement de 1874 sera le prototype même du raisonnement permettant de démontrer des résultats d'impossibilité en mathématiques. Dans ce théorème, on suppose que ce qu'on veut établir est faux (ici, qu'il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers et l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels) puis on joue sur la diagonale du tableau qu'elle définit (le i -ème chiffre du nombre réel $f(i)$), et l'on déduit une contradiction.



Kurt Gödel



5. La différence entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$ est importante en géométrie, quand apparaissent des ensembles infinis. Ainsi le nombre de sommets d'un pavage hexagonal du plan est $\aleph_0$, car on peut tracer une spirale (en



rouge), où l'on numérote tous les sommets. En revanche, le nombre de cercles que l'on peut disposer sur une feuille de taille finie est un infini $2^{\aleph_0}$, car le centre de chaque cercle est un point du plan.