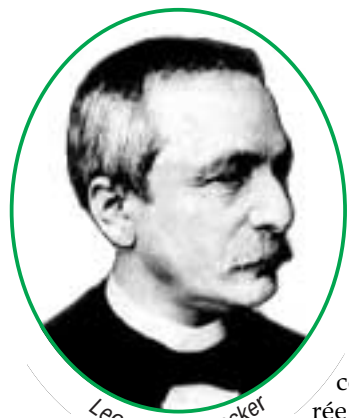




Leopold Kronecker

à d'autres paradoxes qu'on utilise parfois pour attaquer les nouvelles méthodes de calcul que Leibniz défend) ne saura vraiment trouver une place confortable et assurée en mathématiques qu'en se débarrassant de son objectualité, c'est-à-dire quand on ne parlera plus des infiniment petits comme d'objets mathématiques, mais comme de limites.

Les mathématiciens du XX^e siècle sauront redonner aux infiniment petits un statut d'objet authentique. La méthode utilisée au XIX^e siècle pour rendre rigoureux le calcul infinitésimal est un renoncement à l'infini actuel, auquel on substitue un infini potentiel, celui de quantités qui s'approchent de plus en plus de leur limite.

Le prince des mathématiciens, Gauss (1777-1855), exprimant le sentiment partagé par la communauté mathématique de son époque, écrivait par exemple : «Je conteste qu'on utilise un objet infini comme un tout complet ; en mathématiques, cette opération est interdite ; l'infini n'est qu'une façon de parler.»

On peut donc affirmer que, malgré quelques tentatives diverses pour fonder une science mathématique de l'infini, c'est Bolzano et nul autre qui, en affrontant le paradoxe de la réflexivité, a le premier ouvert la voie à ce qui aujourd'hui est notre conception de l'infini mathématique pris comme un tout.

La solution actuelle du paradoxe de la réflexivité

La solution du paradoxe de la réflexivité proposée par Bolzano et rendue parfaitement claire par le développement ultérieur de la théorie des ensembles en termes modernes s'énonce ainsi : la relation «est contenu dans» entre ensembles ne doit pas être confondue avec la relation «avoir une taille plus petite que» : les nombres carrés sont contenus dans les nombres entiers, mais comme totalité ils ont même taille. Il est bien vrai que, si l'ensemble A est contenu dans l'ensemble B, alors la taille de A est inférieure ou égale à celle de B, mais elle peut être égale.

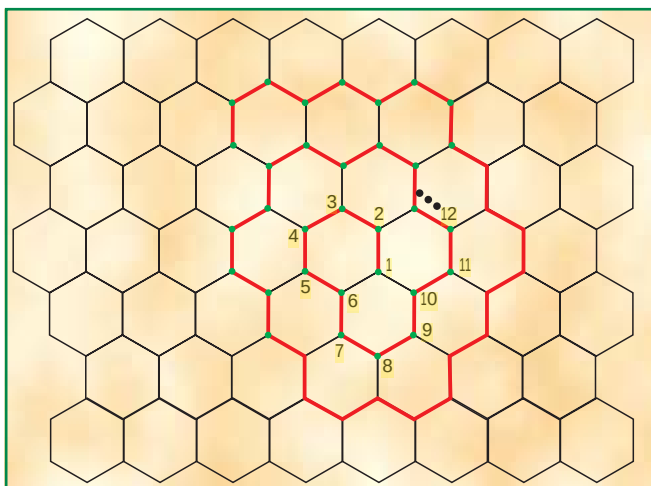
Au lieu de «taille», on emploie souvent le terme technique de «cardinal», mais c'est sans importance, l'idée unique de la solution du paradoxe est d'admettre qu'un ensemble A strictement contenu dans un ensemble B a parfois la même taille. Il faut accepter ce qui paraissait paradoxal et décréter que ça ne l'est plus par une opération de dédoublement de concept : «être contenu dans» n'est pas «avoir une taille plus petite que».

Ce pas franchi, n'allons-nous pas tomber sur des contradictions qui conduiraient à une mathématique inconsistante, et donc intenable ? Le jeu en vaut certainement la chandelle, mais il n'est pas facile à mener et ce sont d'autres que Bolzano qui le joueront, car, il faut bien le dire, Bolzano, comme essoufflé par l'audace de sa proposition initiale, ne mène pas le développement mathématique qu'elle appelle pourtant.

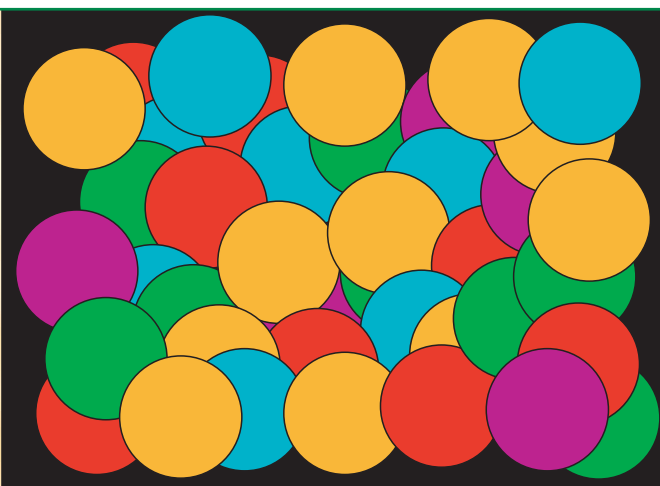
L'exploration mathématique de l'algèbre des bijections sera longue et tortueuse, et Bolzano inaugure une période d'instabilité grave et de controverses parfois acerbes. Le travail principal sera fait par le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918), qui découvrira de nombreuses propriétés des tailles d'ensembles infinis qui lui sembleront souvent à la limite du paradoxe. Cantor distinguera les tailles des ensembles. Si le contraire avait été vrai – c'est-à-dire si chaque ensemble infini avait pu être mis en bijection avec chaque autre –, la théorie de la taille des ensembles infinis aurait singulièrement manqué d'intérêt ! Cantor s'aperçoit, en 1874, que l'ensemble des nombres réels ne peut pas être mis en bijection avec l'ensemble des nombres entiers : il est de taille strictement plus grande. Le raisonnement diagonal que Cantor découvre en simplifiant son raisonnement de 1874 sera le prototype même du raisonnement permettant de démontrer des résultats d'impossibilité en mathématiques. Dans ce théorème, on suppose que ce qu'on veut établir est faux (ici, qu'il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers et l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels) puis on joue sur la diagonale du tableau qu'elle définit (le i -ème chiffre du nombre réel $f(i)$), et l'on déduit une contradiction.



Kurt Gödel



5. La différence entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$ est importante en géométrie, quand apparaissent des ensembles infinis. Ainsi le nombre de sommets d'un pavage hexagonal du plan est $\aleph_0$, car on peut tracer une spirale (en



rouge), où l'on numérote tous les sommets. En revanche, le nombre de cercles que l'on peut disposer sur une feuille de taille finie est un infini $2^{\aleph_0}$, car le centre de chaque cercle est un point du plan.

Mieux (ou pire!), Cantor montre, toujours par un raisonnement diagonal, qu'il existe une infinité de tailles possibles différentes pour les ensembles infinis. Plus précisément, un ensemble E ne peut jamais être mis en bijection avec l'ensemble de ses parties, noté $P(E)$. L'ensemble $P(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ (qui est composé de l'ensemble des nombres pairs, de l'ensemble des nombres premiers, etc.) ne peut pas être mis en bijection avec $\mathbb{N}$. De même, l'ensemble $P(P(\mathbb{N}))$ (ensemble des parties de l'ensemble $P(\mathbb{N})$) ne peut pas être mis en bijection avec $P(\mathbb{N})$; etc.

Ces résultats constituent une première avancée dans la compréhension de l'infini actuel et la preuve que ce qu'on découvre est digne d'intérêt : les résultats construisent une hiérarchie des totalités infinies où l'esprit trouve ses repères. Ces premiers résultats ne sont pas sans soulever réprobations et critiques. Le célèbre mathématicien Kronecker est particulièrement sévère et il bloquera un manuscrit de Cantor en retardant la parution dans le *Journal de Crelle*, l'un des plus prestigieux journaux de mathématiques, auquel Cantor refusera par la suite de proposer ses travaux.

Cantor découvre un résultat étonnant

L'article dont Kronecker a retardé la publication contient un résultat de Cantor tout à fait étonnant qui, bien que ne constituant pas un paradoxe, fut à n'en pas douter considéré sur le moment comme créant une situation logiquement peu satisfaisante. Cantor, toujours occupé à classer les infinis, a en effet découvert avec stupeur que l'ensemble des points d'une surface (un carré, par exemple) possède la même taille que l'ensemble des points d'un segment de droite. Du point de vue de leur taille d'ensemble infini, une droite et un plan (ou même un espace de dimension n) sont identiques. Il écrira à Dedekind à ce propos : «Je le vois, mais je ne le crois pas.»

Cantor adopte l'attitude téméraire qui consiste à accepter cette nouvelle vérité sans la décréter paradoxale, malgré la gêne qu'elle engendre. Comme aucune contradiction véritable ne découle des raisonnements et des calculs que Cantor élabore avec soin, il faut avoir l'audace d'accepter ce que nos facultés de raisonnement produisent et, aussi déconcertante que soit

L'HYPOTHÈSE DU CONTINU ET LA NOTATION DES ALEPH

Cantor proposa de noter les infinis de la façon suivante :

- L'infini des entiers est noté $\aleph_0$ (ce qui se lit aleph zéro)
- L'infini suivant est noté $\aleph_1$, etc.

Par ailleurs, l'infini des nombres réels (le continu) est noté $2^{\aleph_0}$.

La justification de cette notation est que, d'une part, on démontre que l'ensemble des nombres réels a la même taille que l'ensemble des parties de $\aleph_0$, et que, d'autre part, dans le cas fini, on montre que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n (par analogie, on note donc 2^a la taille de l'ensemble des parties d'un ensemble de taille a).

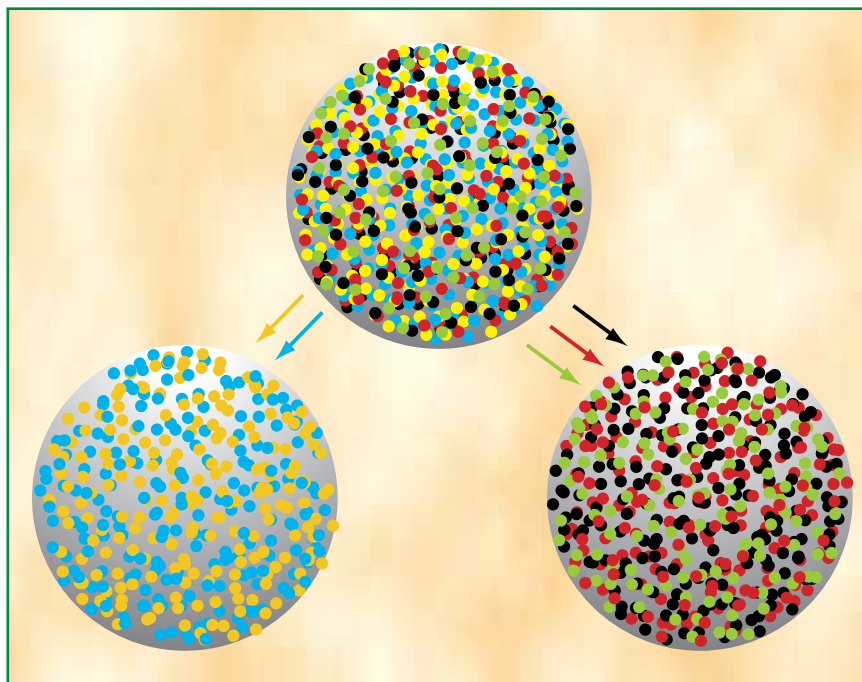
L'échelle des infinis donnée par le théorème fondamental de Cantor est notée : $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \text{etc.}$

La question de savoir s'il n'y a rien entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$ s'écrit : $\aleph_1$ est-il égal à $2^{\aleph_0}$?

L'affirmation $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ est appelée **hypothèse du continu**.

L'affirmation que, pour tout i : $\aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i}$ est appelée **hypothèse généralisée du continu**.

Ces affirmations ont été démontrées indépendantes des axiomes classiquement acceptés pour la théorie des ensembles : jamais il ne sera possible à partir d'eux de savoir ce qu'il en est de la vérité de ces affirmations. Cela ne signifie cependant pas que tout espoir soit perdu de savoir si ces affirmations sont vraies ou fausses : il est possible que certains axiomes concernant les ensembles aient été oubliés et que, lorsque nous les découvrirons et les ajouterons aux axiomes connus, l'hypothèse du continu devienne démontrable.



6. LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI : on établit qu'une sphère peut être décomposée en un nombre fini de morceaux, qui, une fois déplacés (sans déformation), se recomposent en deux sphères identiques à la sphère de départ. Plus généralement, une sphère peut être transformée en un cube sans aucune condition de volume sur la sphère initiale et sur le cube final. Et plus généralement encore, si deux parties A et B de l'espace sont de taille bornée et contiennent chacune au moins une sphère de rayon positif, alors on peut décomposer A en un nombre fini de morceaux qui, après déplacement, reconstitueront B. Ces découpages paradoxaux ont été découverts en 1924 par les mathématiciens polonais Stephan Banach et Alfred Tarski, qui travaillaient sur la théorie de la mesure (théorie abstraite des aires et des volumes). Bien que ces découpages choquent profondément le sens commun, qui s'attend à ce qu'en déplaçant des morceaux d'un objet on n'en modifie pas le volume, il n'y a pas «paradoxe» au sens strict : aucune contradiction n'est introduite dans la théorie des ensembles. Ces découpages montrent seulement que le monde du continu mathématique et les conséquences de l'axiome du choix ne correspondent pas à nos attentes intuitives.