

Mieux (ou pire!), Cantor montre, toujours par un raisonnement diagonal, qu'il existe une infinité de tailles possibles différentes pour les ensembles infinis. Plus précisément, un ensemble E ne peut jamais être mis en bijection avec l'ensemble de ses parties, noté $P(E)$. L'ensemble $P(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ (qui est composé de l'ensemble des nombres pairs, de l'ensemble des nombres premiers, etc.) ne peut pas être mis en bijection avec $\mathbb{N}$. De même, l'ensemble $P(P(\mathbb{N}))$ (ensemble des parties de l'ensemble $P(\mathbb{N})$) ne peut pas être mis en bijection avec $P(\mathbb{N})$; etc.

Ces résultats constituent une première avancée dans la compréhension de l'infini actuel et la preuve que ce qu'on découvre est digne d'intérêt : les résultats construisent une hiérarchie des totalités infinies où l'esprit trouve ses repères. Ces premiers résultats ne sont pas sans soulever réprobations et critiques. Le célèbre mathématicien Kronecker est particulièrement sévère et il bloquera un manuscrit de Cantor en retardant la parution dans le *Journal de Crelle*, l'un des plus prestigieux journaux de mathématiques, auquel Cantor refusera par la suite de proposer ses travaux.

Cantor découvre un résultat étonnant

L'article dont Kronecker a retardé la publication contient un résultat de Cantor tout à fait étonnant qui, bien que ne constituant pas un paradoxe, fut à n'en pas douter considéré sur le moment comme créant une situation logiquement peu satisfaisante. Cantor, toujours occupé à classer les infinis, a en effet découvert avec stupeur que l'ensemble des points d'une surface (un carré, par exemple) possède la même taille que l'ensemble des points d'un segment de droite. Du point de vue de leur taille d'ensemble infini, une droite et un plan (ou même un espace de dimension n) sont identiques. Il écrira à Dedekind à ce propos : «Je le vois, mais je ne le crois pas.»

Cantor adopte l'attitude téméraire qui consiste à accepter cette nouvelle vérité sans la décréter paradoxale, malgré la gêne qu'elle engendre. Comme aucune contradiction véritable ne découle des raisonnements et des calculs que Cantor élabore avec soin, il faut avoir l'audace d'accepter ce que nos facultés de raisonnement produisent et, aussi déconcertante que soit

L'HYPOTHÈSE DU CONTINU ET LA NOTATION DES ALEPH

Cantor proposa de noter les infinis de la façon suivante :

- L'infini des entiers est noté $\aleph_0$ (ce qui se lit aleph zéro)
- L'infini suivant est noté $\aleph_1$, etc.

Par ailleurs, l'infini des nombres réels (le continu) est noté $2^{\aleph_0}$.

La justification de cette notation est que, d'une part, on démontre que l'ensemble des nombres réels a la même taille que l'ensemble des parties de $\aleph_0$, et que, d'autre part, dans le cas fini, on montre que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n (par analogie, on note donc 2^a la taille de l'ensemble des parties d'un ensemble de taille a).

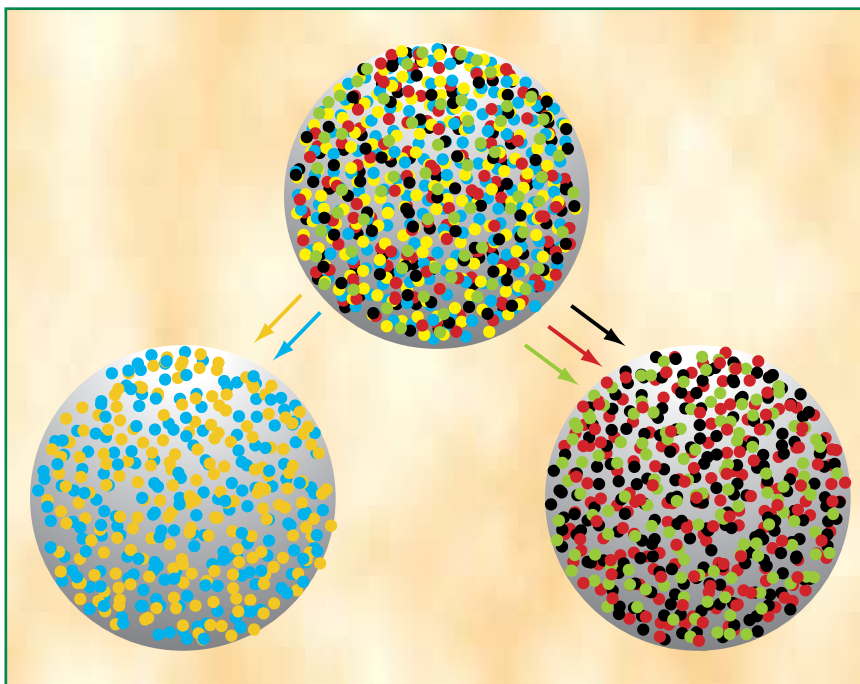
L'échelle des infinis donnée par le théorème fondamental de Cantor est notée : $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}$, etc.

La question de savoir s'il n'y a rien entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$ s'écrit : $\aleph_1$ est-il égal à $2^{\aleph_0}$?

L'affirmation $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ est appelée hypothèse du continu.

L'affirmation que, pour tout i : $\aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i}$ est appelée hypothèse généralisée du continu.

Ces affirmations ont été démontrées indépendantes des axiomes classiquement acceptés pour la théorie des ensembles : jamais il ne sera possible à partir d'eux de savoir ce qu'il en est de la vérité de ces affirmations. Cela ne signifie cependant pas que tout espoir soit perdu de savoir si ces affirmations sont vraies ou fausses : il est possible que certains axiomes concernant les ensembles aient été oubliés et que, lorsque nous les découvrirons et les ajouterons aux axiomes connus, l'hypothèse du continu devienne démontrable.



6. LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI : on établit qu'une sphère peut être décomposée en un nombre fini de morceaux, qui, une fois déplacés (sans déformation), se recomposent en deux sphères identiques à la sphère de départ. Plus généralement, une sphère peut être transformée en un cube sans aucune condition de volume sur la sphère initiale et sur le cube final. Et plus généralement encore, si deux parties A et B de l'espace sont de taille bornée et contiennent chacune au moins une sphère de rayon positif, alors on peut décomposer A en un nombre fini de morceaux qui, après déplacement, reconstitueront B. Ces découpages paradoxaux ont été découverts en 1924 par les mathématiciens polonais Stephan Banach et Alfred Tarski, qui travaillaient sur la théorie de la mesure (théorie abstraite des aires et des volumes). Bien que ces découpages choquent profondément le sens commun, qui s'attend à ce qu'en déplaçant des morceaux d'un objet on n'en modifie pas le volume, il n'y a pas «paradoxe» au sens strict : aucune contradiction n'est introduite dans la théorie des ensembles. Ces découpages montrent seulement que le monde du continu mathématique et les conséquences de l'axiome du choix ne correspondent pas à nos attentes intuitives.

PARADOXE DE RUSSELL

Soit l'ensemble des x qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes : $E = \{x ; x \notin x\}$. Si $E \in E$, alors, par définition, $E \notin E$. Si $E \notin E$, alors, par définition, $E \in E$: c'est contradictoire !

Le paradoxe de l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes (paradoxe de Russell) est aujourd'hui correctement résolu en théorie des ensembles de la façon suivante.

On définit les méthodes qui permettent de créer de nouveaux ensembles à partir d'ensembles existant déjà (réunion, ensemble des parties, etc.), et il ne suffit pas de considérer une propriété (par exemple, $x \notin x$) pour pouvoir affirmer qu'il existe un ensemble regroupant tous les objets qui satisfont cette propriété. La notation $E = \{x ; x \notin x\}$ ne désigne pas nécessairement un objet légitime de la théorie des ensembles sur lequel on peut raisonner comme le fait le paradoxe ; si on veut l'utiliser, il faut établir que c'est un ensemble par utilisation des règles que fixe la théorie. Pour $E = \{x ; x \notin x\}$, on n'y arrive pas. Dans la théorie Zermelo-Fraenkel (désignée par ZF), la présentation correcte du raisonnement ci-dessus est donc :

Supposons qu'il existe un ensemble défini par : $E = \{x ; x \notin x\}$.

Si $E \in E$, alors, par définition, $E \notin E$. Si $E \notin E$, alors, par définition, $E \in E$, c'est contradictoire, donc il n'existe pas d'ensemble défini par l'égalité : $E = \{x ; x \notin x\}$.

Pour des raisons analogues, il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles, ni d'ensemble de tous les cardinaux, ou d'ensemble de tous les ordinaux. Cette solution classique aux paradoxes de la théorie des ensembles, découverts au début du XX^e siècle, réussit bien. Aucun nouveau paradoxe n'a été découvert dans la théorie ZF jusqu'à présent.

cette nouvelle réalité de l'infini actuel, il faut en poursuivre l'exploration.

À vrai dire, au tournant du XX^e siècle, certaines contradictions (ce qu'on appellera les antinomies) sembleront rendre la construction cantorienne intenable. Toutefois, en quelques années, ces difficultés seront circonscrites (plusieurs méthodes seront même proposées) et ce qui apparut à certains comme la faillite de la théorie mathématique de l'infini actuel sera en définitive l'occasion pour cette théorie de se forger une armure qu'aujourd'hui rien n'est venu sérieusement érafler.

L'hypothèse du continu

Revenons à Cantor qui, en théoricien consciencieux, développe une arithmétique de l'infini, c'est-à-dire une extension, aux nombres qui lui servent à mesurer l'infini, des règles de calcul qu'on applique aux nombres entiers, servant à mesurer le fini. À cette occasion, il est contraint de distinguer deux types de nombres infinis, les cardinaux et les ordinaux. Les cardinaux sont les tailles des ensembles quand on les considère de manière brute, sans tenir compte d'un possible ordre entre leurs éléments. Cantor introduit en 1893 la notation $\aleph_0$ pour le cardinal de l'ensemble des nombres entiers, $2^{\aleph_0}$ pour le cardinal du continu (l'ensemble

des nombres réels), qui est le même que celui de $P(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$. Il utilise $2^{2^{\aleph_0}}$ pour le cardinal de $P(P(\mathbb{N}))$, etc.

L'autre type de nombres infinis de Cantor, les ordinaux, sert à mesurer la taille des ensembles lorsque leurs éléments sont ordonnés selon un bon ordre (un ordre tel que toute partie de l'ensemble possède un plus petit élément). Au-delà des ordinaux finis, qu'on assimile aux nombres entiers, il y a ω , le premier ordinal transfini, puis $\omega+1$, $\omega+2$, etc., qu'on obtient en ajoutant des unités une à une à ω . Plus loin encore, on trouve 2ω , $2\omega+1$,... puis ω^2 , ω^ω , etc.

Cantor découvre alors un problème qui finalement se révélera d'une difficulté qu'aujourd'hui encore nous n'avons pas totalement maîtrisée : l'hypothèse du continu.

Le cardinal de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, ce qu'on appelle le continu et qui est mesuré par $2^{\aleph_0}$, est strictement plus grand que le cardinal des entiers (appelé infini dénombrable et mesuré, nous l'avons dit, par $\aleph_0$). Mais y a-t-il un autre cardinal entre les deux ? L'hypothèse du continu est l'affirmation qu'entre ces deux tailles d'ensembles infinis, $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$, il n'y en a pas d'autres. Comme Cantor désigne par $\aleph_1$ le plus petit des cardinaux plus grands que $\aleph_0$,

l'hypothèse du continu est simplement l'affirmation $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. (L'hypothèse généralisée du continu est l'affirmation que $2^{\aleph_s} = \aleph_{s+1}$ pour tout s .)

Deux situations sont envisageables : soit (a) il n'y a pas d'autres tailles infinies entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$, ce qui est équivalent à dire que «tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ ou avec $\mathbb{R}$ » (c'est là un énoncé simple et, en apparence, très concret) ; soit (b) il y en a d'autres et alors il faudrait savoir combien et comment on les obtient. Nul ne peut prétendre disposer d'une idée claire des nombres réels s'il n'a une réponse précise au problème de l'hypothèse du continu. Cantor s'épuise à le résoudre et n'y réussira pas, bien qu'il ait parfois pensé, à tort, avoir résolu la question.

L'indécidabilité ne résout rien

Plus tard, la théorie des ensembles formalisée, deux résultats importants furent démontrés concernant l'hypothèse du continu. En 1938, le mathématicien autrichien Kurt Gödel prouva que, si la théorie habituelle des ensembles est consistante (ne conduit pas à une contradiction) alors la même théorie complétée par l'axiome qui affirme que l'hypothèse du continu est vraie ne conduit pas plus à une contradiction. Admettre l'hypothèse du continu n'est donc pas susceptible de faire s'effondrer la théorie usuelle des ensembles. En 1963, Paul Cohen ira plus loin : si la théorie des ensembles est consistante, alors la même théorie complétée en ajoutant l'affirmation que l'hypothèse du continu est fausse est, elle aussi, sans contradiction.

Ces deux résultats regroupés permettent de dire que celui qui admet la théorie usuelle des ensembles peut, sans risque supplémentaire de contradiction, prendre l'hypothèse du continu ou prendre sa négation. La théorie des ensembles laisse le choix aux mathématiciens de considérer l'hypothèse du continu comme vraie ou comme fausse.

Cette indécidabilité de l'hypothèse du continu n'est pas un paradoxe : la théorie ne se contredit pas, au contraire elle ne dit rien. Toutefois cette sous-détermination est logiquement très insatisfaisante et profondément troublante.

En effet, considérons le monde des nombres entiers : il n'est pas arbitraire, ce n'est pas nous qui décidons