

PARADOXE DE RUSSELL

Soit l'ensemble des x qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes : $E = \{x ; x \notin x\}$. Si $E \in E$, alors, par définition, $E \notin E$. Si $E \notin E$, alors, par définition, $E \in E$: c'est contradictoire !

Le paradoxe de l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes (paradoxe de Russell) est aujourd'hui correctement résolu en théorie des ensembles de la façon suivante.

On définit les méthodes qui permettent de créer de nouveaux ensembles à partir d'ensembles existant déjà (réunion, ensemble des parties, etc.), et il ne suffit pas de considérer une propriété (par exemple, $x \notin x$) pour pouvoir affirmer qu'il existe un ensemble regroupant tous les objets qui satisfont cette propriété. La notation $E = \{x ; x \notin x\}$ ne désigne pas nécessairement un objet légitime de la théorie des ensembles sur lequel on peut raisonner comme le fait le paradoxe ; si on veut l'utiliser, il faut établir que c'est un ensemble par utilisation des règles que fixe la théorie. Pour $E = \{x ; x \notin x\}$, on n'y arrive pas. Dans la théorie Zermelo-Fraenkel (désignée par ZF), la présentation correcte du raisonnement ci-dessus est donc :

Supposons qu'il existe un ensemble défini par : $E = \{x ; x \notin x\}$.

Si $E \in E$, alors, par définition, $E \notin E$. Si $E \notin E$, alors, par définition, $E \in E$, c'est contradictoire, donc il n'existe pas d'ensemble défini par l'égalité : $E = \{x ; x \notin x\}$.

Pour des raisons analogues, il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles, ni d'ensemble de tous les cardinaux, ou d'ensemble de tous les ordinaux. Cette solution classique aux paradoxes de la théorie des ensembles, découverts au début du XX^e siècle, réussit bien. Aucun nouveau paradoxe n'a été découvert dans la théorie ZF jusqu'à présent.

cette nouvelle réalité de l'infini actuel, il faut en poursuivre l'exploration.

À vrai dire, au tournant du XX^e siècle, certaines contradictions (ce qu'on appellera les antinomies) sembleront rendre la construction cantorienne intenable. Toutefois, en quelques années, ces difficultés seront circonscrites (plusieurs méthodes seront même proposées) et ce qui apparut à certains comme la faillite de la théorie mathématique de l'infini actuel sera en définitive l'occasion pour cette théorie de se forger une armure qu'aujourd'hui rien n'est venu sérieusement érafler.

L'hypothèse du continu

Revenons à Cantor qui, en théoricien consciencieux, développe une arithmétique de l'infini, c'est-à-dire une extension, aux nombres qui lui servent à mesurer l'infini, des règles de calcul qu'on applique aux nombres entiers, servant à mesurer le fini. À cette occasion, il est contraint de distinguer deux types de nombres infinis, les cardinaux et les ordinaux. Les cardinaux sont les tailles des ensembles quand on les considère de manière brute, sans tenir compte d'un possible ordre entre leurs éléments. Cantor introduit en 1893 la notation $\aleph_0$ pour le cardinal de l'ensemble des nombres entiers, $2^{\aleph_0}$ pour le cardinal du continu (l'ensemble

des nombres réels), qui est le même que celui de $P(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$. Il utilise $2^{2^{\aleph_0}}$ pour le cardinal de $P(P(\mathbb{N}))$, etc.

L'autre type de nombres infinis de Cantor, les ordinaux, sert à mesurer la taille des ensembles lorsque leurs éléments sont ordonnés selon un bon ordre (un ordre tel que toute partie de l'ensemble possède un plus petit élément). Au-delà des ordinaux finis, qu'on assimile aux nombres entiers, il y a ω , le premier ordinal transfini, puis $\omega+1$, $\omega+2$, etc., qu'on obtient en ajoutant des unités une à une à ω . Plus loin encore, on trouve 2ω , $2\omega+1$,... puis ω^2 , ω^ω , etc.

Cantor découvre alors un problème qui finalement se révélera d'une difficulté qu'aujourd'hui encore nous n'avons pas totalement maîtrisée : l'hypothèse du continu.

Le cardinal de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, ce qu'on appelle le continu et qui est mesuré par $2^{\aleph_0}$, est strictement plus grand que le cardinal des entiers (appelé infini dénombrable et mesuré, nous l'avons dit, par $\aleph_0$). Mais y a-t-il un autre cardinal entre les deux ? L'hypothèse du continu est l'affirmation qu'entre ces deux tailles d'ensembles infinis, $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$, il n'y en a pas d'autres. Comme Cantor désigne par $\aleph_1$ le plus petit des cardinaux plus grands que $\aleph_0$,

l'hypothèse du continu est simplement l'affirmation $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. (L'hypothèse généralisée du continu est l'affirmation que $2^{\aleph_s} = \aleph_{s+1}$ pour tout s .)

Deux situations sont envisageables : soit (a) il n'y a pas d'autres tailles infinies entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$, ce qui est équivalent à dire que «tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ ou avec $\mathbb{R}$ » (c'est là un énoncé simple et, en apparence, très concret) ; soit (b) il y en a d'autres et alors il faudrait savoir combien et comment on les obtient. Nul ne peut prétendre disposer d'une idée claire des nombres réels s'il n'a une réponse précise au problème de l'hypothèse du continu. Cantor s'épuise à le résoudre et n'y réussira pas, bien qu'il ait parfois pensé, à tort, avoir résolu la question.

L'indécidabilité ne résout rien

Plus tard, la théorie des ensembles formalisée, deux résultats importants furent démontrés concernant l'hypothèse du continu. En 1938, le mathématicien autrichien Kurt Gödel prouva que, si la théorie habituelle des ensembles est consistante (ne conduit pas à une contradiction) alors la même théorie complétée par l'axiome qui affirme que l'hypothèse du continu est vraie ne conduit pas plus à une contradiction. Admettre l'hypothèse du continu n'est donc pas susceptible de faire s'effondrer la théorie usuelle des ensembles. En 1963, Paul Cohen ira plus loin : si la théorie des ensembles est consistante, alors la même théorie complétée en ajoutant l'affirmation que l'hypothèse du continu est fausse est, elle aussi, sans contradiction.

Ces deux résultats regroupés permettent de dire que celui qui admet la théorie usuelle des ensembles peut, sans risque supplémentaire de contradiction, prendre l'hypothèse du continu ou prendre sa négation. La théorie des ensembles laisse le choix aux mathématiciens de considérer l'hypothèse du continu comme vraie ou comme fausse.

Cette indécidabilité de l'hypothèse du continu n'est pas un paradoxe : la théorie ne se contredit pas, au contraire elle ne dit rien. Toutefois cette sous-détermination est logiquement très insatisfaisante et profondément troublante.

En effet, considérons le monde des nombres entiers : il n'est pas arbitraire, ce n'est pas nous qui décidons