

si un nombre est pair ou impair, premier ou composé, etc. Pourquoi donc le monde des nombres réels serait-il arbitraire, et nous permettrait de décider en fonction de nos goûts qu'il existe de partie infinie de $\mathbb{R}$ impossible à mettre en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$, ou qu'au contraire il n'en existe pas ?

Comme le pensait Cantor lui-même, ainsi que Gödel, l'hypothèse du continu doit être vraie ou fausse, et la théorie des ensembles doit nous permettre de le savoir, à moins qu'elle ne soit qu'une illusion, ce qui signifierait que la compréhension qu'elle nous donne de l'infini actuel est factice. La situation créée par les résultats de Gödel et de Cohen sur l'hypothèse du continu est logiquement insatisfaisante, mais c'est toute la signification de la théorie de l'infini actuel proposée par Cantor qui est en cause, et, finalement, c'est l'idée même d'une théorie de l'infini actuel qui se joue.

Voies pour aller plus loin

L'indécidabilité de l'hypothèse du continu ne règle donc pas la question de l'infini, mais au contraire l'exacerbe : si vraiment la théorie des ensembles fournit une compréhension de l'infini actuel et n'est pas qu'un jeu gratuit entre symboles mathématiques, sans contrepartie dans le monde réel, il doit être possible d'avancer encore.

Une première voie consiste à remettre en cause la théorie usuelle des ensembles. Cette théorie, notée ZF (en l'honneur des deux mathématiciens E. Zermelo et A. Fraenkel qui la définirent au début du XX^e siècle), peut être jugée insatisfaisante pour diverses raisons. En particulier, parce qu'elle engendre des situations contraires à l'intuition concernant l'existence d'objets mathématiques qu'on ne peut pas construire (voir la figure 7). Diverses éventualités, théorie des types, théorie constructiviste des ensembles, théorie des ensembles avec ensemble universel, etc., ont été proposées sans toutefois retenir vraiment l'attention des mathématiciens, qui restent attachés à la simplicité de Zermelo-Fraenkel et ne semblent pas trouver très grave la situation créée par l'hypothèse du continu. Il est vrai que ces théories alternatives obligent à réévaluer tout le travail mathématique déjà fait, alors qu'aucune véritable contradiction n'est apparue. Seule une insatisfaction philosophique pousse certains à vouloir abandonner Zermelo-Fraenkel.

PARADOXE DE L'AUTORÉFÉRENCE ET DE L'INFINI

Chacun connaît le paradoxe du menteur. Un personnage dit «je mens». S'il dit vrai, alors il ment, donc il ne dit pas vrai : c'est absurde. S'il ment, alors ce qu'il dit est vrai, et donc il ne ment pas : c'est absurde. On résout ce paradoxe en disant qu'il faut s'interdire les phrases autoréférentes. Les choses ne sont peut-être pas si simples, car on s'est aperçu récemment que l'introduction de l'infini permet d'éviter l'autoréférence tout en maintenant une situation paradoxale.

Soit une infinité de personnes placées en rang : $s(0), s(1), \dots, s(n), \dots$

Chacune dit : «Au moins une personne derrière moi ment.»

Qui dit vrai ? Qui ment ?

D'après le sens des phrases prononcées :

- derrière toute personne qui dit vrai, il y a au moins une personne qui ment ;
- si une personne ment, alors toutes les personnes derrière elle disent vrai.

Si on désigne par M les personnes qui mentent et par H celles qui sont honnêtes et ne mentent pas, les deux règles précédentes se traduisent :

- derrière tout H, il y a au moins un M ;
- derrière un M, il n'y a que des H.

Il est impossible de concevoir une suite de M et de H qui vérifie ces deux règles (car tout M doit être suivi uniquement de H, ce qui ne se peut pas, puisque tout H doit être suivi d'au moins un M). Comme dans le cas du menteur, mais cette fois à cause de l'infinité des personnes, la situation est paradoxale. Ces paradoxes, dits sémantiques, sont encore examinés par les logiciens, et aucune solution totalement satisfaisante ne semble avoir été trouvée.

La seconde voie consiste à admettre que Zermelo-Fraenkel est satisfaisante, c'est-à-dire qu'elle n'énonce que des choses acceptables pour les ensembles, mais qu'elle est incomplète. Certains axiomes manqueraient, et le travail du logicien et du mathématicien serait de les rechercher pour les ajouter. Ces axiomes découverts (ou au moins certains d'entre eux), l'hypothèse du continu ou sa négation deviendrait prouvable.

La seconde voie n'est pas du tout absurde et, en insistant sur l'incomplétude actuelle de la théorie des ensembles, on ne fait que prendre au sérieux les théorèmes généraux d'incomplétude démontrés par Kurt Gödel en 1931, dont l'indécidabilité de l'hypothèse du continu ne serait qu'une manifestation en théorie des ensembles. Cette seconde voie conduit au programme de recherche de trouver de nouveaux axiomes à ajouter à la théorie des ensembles, programme que Kurt Gödel lui-même a défendu.

Les grands cardinaux

Les travaux faits en logique mathématique sur ce que l'on dénomme les grands cardinaux constituent le domaine de recherche d'où pourrait provenir la solution de l'énigme de l'hypothèse du continu (une partie infinie

de $\mathbb{R}$ est-elle toujours en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$?), tout en étant le domaine où les mathématiciens rencontrent de nouveaux infinis actuels dont la taille vertigineuse aurait fait tourner la tête à Cantor lui-même.

Les axiomes de grands cardinaux sont des affirmations portant sur des ensembles monstrueusement grands. Délicats à définir, ils procèdent de principes analogues à celui qui consiste à affirmer que non seulement $\mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$, $P(P(\mathbb{N}))$, ... sont des infinis actuels légitimes, mais qu'il y en a de plus grands encore, dont certains qui contiennent à la fois $\mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$, $P(P(\mathbb{N}))$,

Les axiomes de grands cardinaux sont vis-à-vis de la théorie Zermelo-Fraenkel comme l'est l'hypothèse du continu : on peut choisir, sans risquer d'introduire de contradiction, de les ajouter ou d'ajouter leur négation (en fait, les ajouter pourrait, en théorie, introduire une contradiction, mais personne en pratique n'en trouve jamais. Toutefois, contrairement à ce qui se passe pour l'hypothèse du continu, il est naturel de les tenir pour vrais. En effet, adopter leur négation serait limiter la taille des ensembles possibles, ce qui n'est pas naturel. De plus, cette même négation contredit un principe d'ouverture et de tolérance qui suggère d'accepter tous les objets qui n'introduisent pas d'incohérence. On dit que les axiomes des