

grands cardinaux sont vrais *a priori*. Une autre raison conduit à accepter les axiomes des grands cardinaux. D'une façon qui a étonné les mathématiciens, ces axiomes de grands cardinaux se classent linéairement les uns par rapport aux autres comme s'ils désignaient véritablement une hiérarchie d'infinis (au-delà de celle mise en lumière par Cantor et la complétant). S'ils n'étaient qu'un

jeu formel et gratuit de logiciens, rien n'expliquerait qu'ils s'ordonnent ainsi les uns relativement aux autres. Pour les logiciens K. Kanamori et M. Magidor, «cet aspect hiérarchique de la théorie des grands cardinaux est quelque peu mystérieux, mais c'est aussi un argument fort en faveur de l'adoption des axiomes de grands cardinaux et du fait qu'ils fournissent les exten-

sions naturelles de Zermelo-Fraenkel».

La possibilité de trouver des liens entre les axiomes de grands cardinaux et l'hypothèse du continu est réelle, et des résultats partiels ont déjà été obtenus : certaines parties infinies de $\mathbb{R}$ dont on ne sait pas montrer dans Zermelo-Fraenkel qu'elles peuvent être mises en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$, peuvent être mises en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$ grâce aux axiomes de grands cardinaux.

La théorie que Cantor a créée semblerait donc tenir debout et, mieux que cela, progresser par ajouts de nouveaux axiomes naturels. L'infini actuel n'est ni paradoxal, ni logiquement insatisfaisant (comme l'indécidabilité de l'hypothèse du continu nous a conduit à le craindre un moment), mais au contraire cohérent et vraisemblable. Comme en physique, où notre conception du temps et de l'espace a dû être revue à la lumière de la théorie de la relativité (laquelle, en dépit des premières apparences, n'est nullement paradoxale), en mathématiques la conception de l'infini actuel force à reconstruire notre idée des objets et à revoir notre conception de la réalité mathématique. À celui qui accepte cette réforme profonde des conceptions, on ne peut opposer aucun paradoxe. On peut même penser que les situations logiquement insatisfaisantes qu'on croit encore percevoir se dissiperont à mesure que notre esprit acceptera pleinement le nouvel univers conceptuel proposé par ces mathématiques de l'infini actuel, qu'aujourd'hui encore les mathématiciens affinent et perfectionnent.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique théorique à l'Université de Lille.

A. KANAMORI, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, 1994.

J.W. DAUBEN, *Georg Cantor : His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, 1979.

J.-L. KRIVINE, *Théorie des ensembles*, Cassini, Paris, 1998.

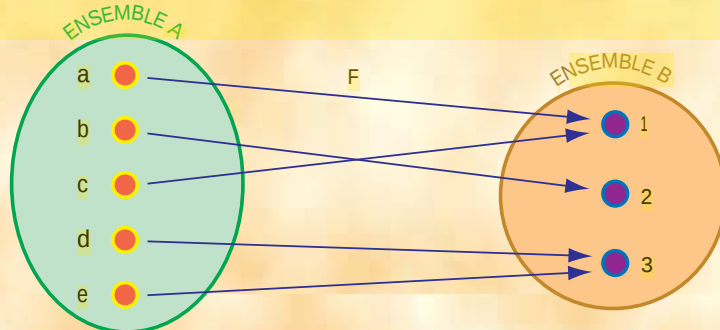
Bernard BOLZANO, *Les paradoxes de l'infini*, introduction, traduction de l'allemand et notes par Hourya Sinaceur, Seuil, 1993.

Jean-Paul DELAHAYE, *Jeux mathématiques et mathématiques des jeux*, chapitre 7 : Des jeux infinis aux grands ensembles, Belin/Pour la science, 1998.

Infini des mathématiciens, infini des philosophes, ouvrage collectif sous la direction de F. Monnoyeur, Belin, 1992.

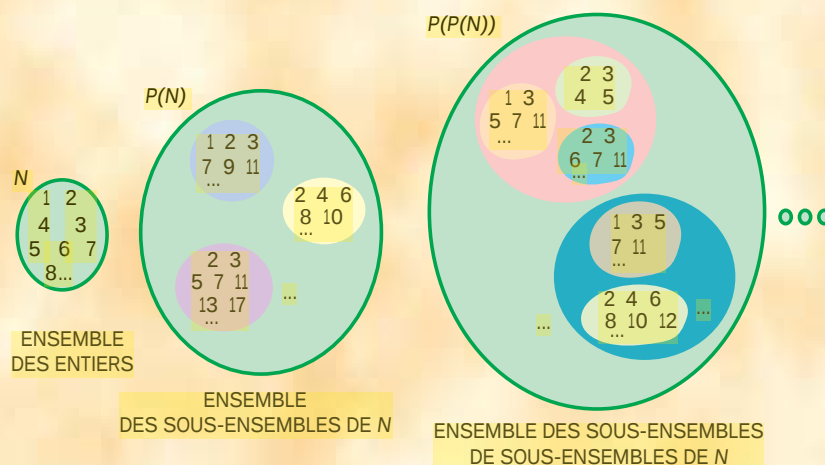
UN AXIOME DÉFINISSANT UN GRAND CARDINAL

Une surjection de A vers B est une application F qui atteint tout point de B : pour tout élément β dans l'ensemble B , il existe un élément α de l'ensemble A tel que $F(\alpha) = \beta$.



S'il existe une surjection de l'ensemble A vers l'ensemble B , on dit que A est plus gros que B . Si, de plus, il n'existe pas de surjection de B vers A , on dit que A est strictement plus gros que B .

Cantor a montré que l'ensemble $P(A)$ des parties d'un ensemble A est toujours strictement plus gros que l'ensemble A . Il en résulte qu'il existe une infinité d'ensembles de plus en plus gros, N , $P(N)$, $P(P(N))$, et, accessoirement, qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.



Voici un exemple d'axiome de grands cardinaux : il existe un ensemble non dénombrable A tel que, si A est strictement plus gros que B , alors A est aussi strictement plus gros que l'ensemble $P(B)$ des parties de B , plus gros que l'ensemble $P(P(B))$ des parties de $P(B)$, etc. et plus généralement, plus gros que tout ensemble définissable à partir de l'ensemble B . Le cardinal de A est un grand cardinal. Cependant ces axiomes sont, dans la grande majorité des cas, des indécidables de Gödel : avec les axiomes habituels de la théorie des ensembles, on ne peut prouver ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux. Il faut donc les accepter tels quels, sans que l'on puisse espérer les démontrer à partir des axiomes de la théorie des ensembles. Ils sont pourtant utiles.