

grands cardinaux sont vrais *a priori*. Une autre raison conduit à accepter les axiomes des grands cardinaux. D'une façon qui a étonné les mathématiciens, ces axiomes de grands cardinaux se classent linéairement les uns par rapport aux autres comme s'ils désignaient véritablement une hiérarchie d'infinis (au-delà de celle mise en lumière par Cantor et la complétant). S'ils n'étaient qu'un

jeu formel et gratuit de logiciens, rien n'expliquerait qu'ils s'ordonnent ainsi les uns relativement aux autres. Pour les logiciens K. Kanamori et M. Magidor, «cet aspect hiérarchique de la théorie des grands cardinaux est quelque peu mystérieux, mais c'est aussi un argument fort en faveur de l'adoption des axiomes de grands cardinaux et du fait qu'ils fournissent les exten-

sions naturelles de Zermelo-Fraenkel».

La possibilité de trouver des liens entre les axiomes de grands cardinaux et l'hypothèse du continu est réelle, et des résultats partiels ont déjà été obtenus : certaines parties infinies de $\mathbb{R}$ dont on ne sait pas montrer dans Zermelo-Fraenkel qu'elles peuvent être mises en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$, peuvent être mises en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$ grâce aux axiomes de grands cardinaux.

La théorie que Cantor a créée semblerait donc tenir debout et, mieux que cela, progresser par ajouts de nouveaux axiomes naturels. L'infini actuel n'est ni paradoxal, ni logiquement insatisfaisant (comme l'indécidabilité de l'hypothèse du continu nous a conduit à le craindre un moment), mais au contraire cohérent et vraisemblable. Comme en physique, où notre conception du temps et de l'espace a dû être revue à la lumière de la théorie de la relativité (laquelle, en dépit des premières apparences, n'est nullement paradoxale), en mathématiques la conception de l'infini actuel force à reconstruire notre idée des objets et à revoir notre conception de la réalité mathématique. À celui qui accepte cette réforme profonde des conceptions, on ne peut opposer aucun paradoxe. On peut même penser que les situations logiquement insatisfaisantes qu'on croit encore percevoir se dissiperont à mesure que notre esprit acceptera pleinement le nouvel univers conceptuel proposé par ces mathématiques de l'infini actuel, qu'aujourd'hui encore les mathématiciens affinent et perfectionnent.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique théorique à l'Université de Lille.

A. KANAMORI, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, 1994.

J.W. DAUBEN, *Georg Cantor : His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, 1979.

J.-L. KRIVINE, *Théorie des ensembles*, Cassini, Paris, 1998.

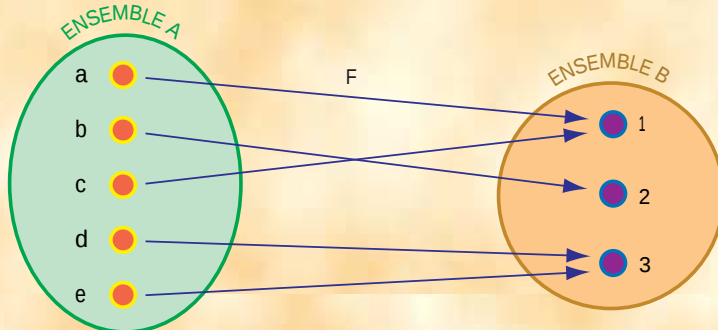
Bernard BOLZANO, *Les paradoxes de l'infini*, introduction, traduction de l'allemand et notes par Hourya Sinaceur, Seuil, 1993.

Jean-Paul DELAHAYE, *Jeux mathématiques et mathématiques des jeux*, chapitre 7 : Des jeux infinis aux grands ensembles, Belin/Pour la science, 1998.

Infini des mathématiciens, infini des philosophes, ouvrage collectif sous la direction de F. Monnoyeur, Belin, 1992.

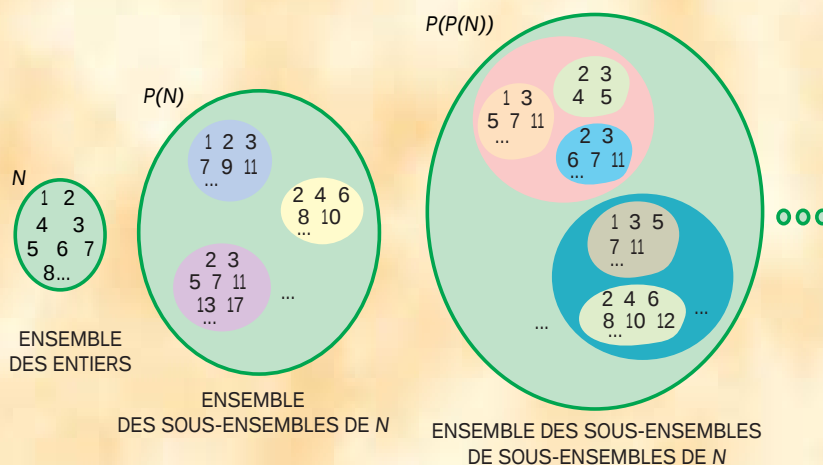
UN AXIOME DÉFINISSANT UN GRAND CARDINAL

Une surjection de A vers B est une application F qui atteint tout point de B : pour tout élément β dans l'ensemble B , il existe un élément α de l'ensemble A tel que $F(\alpha) = \beta$.



S'il existe une surjection de l'ensemble A vers l'ensemble B , on dit que A est plus gros que B . Si, de plus, il n'existe pas de surjection de B vers A , on dit que A est strictement plus gros que B .

Cantor a montré que l'ensemble $P(A)$ des parties d'un ensemble A est toujours strictement plus gros que l'ensemble A . Il en résulte qu'il existe une infinité d'ensembles de plus en plus gros, N , $P(N)$, $P(P(N))$, et, accessoirement, qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.

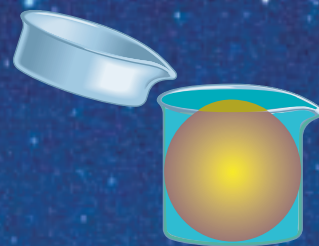
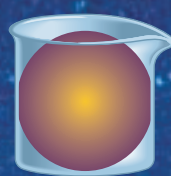
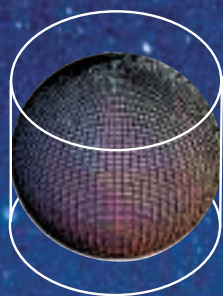


Voici un exemple d'axiome de grands cardinaux : il existe un ensemble non dénombrable A tel que, si A est strictement plus gros que B , alors A est aussi strictement plus gros que l'ensemble $P(B)$ des parties de B , plus gros que l'ensemble $P(P(B))$ des parties de $P(B)$, etc. et plus généralement, plus gros que tout ensemble définissable à partir de l'ensemble B . Le cardinal de A est un grand cardinal. Cependant ces axiomes sont, dans la grande majorité des cas, des indécidables de Gödel : avec les axiomes habituels de la théorie des ensembles, on ne peut prouver ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux. Il faut donc les accepter tels quels, sans que l'on puisse espérer les démontrer à partir des axiomes de la théorie des ensembles. Ils sont pourtant utiles.

Archimède face à l'innombrable

ILAN VARDI

Archimède a inventé une notation pour compter de très grands nombres, mais une question reste ouverte : pourquoi s'est-il arrêté à son «plus grand nombre»?



« Certains estiment, roi Gélon, que le nombre de grains de sable est infiniment grand, et j'entends non seulement le sable des environs de Syracuse et du reste de la Sicile, mais encore celui qui est répandu dans toute la Terre, habitée ou inculte. D'autres, tout en admettant que ce nombre n'est pas infiniment grand, pensent qu'il n'existe pas de nombre exprimable assez grand pour dépasser la quantité de sable. Cependant, si ceux qui sont de cet avis s'imaginaient un volume de sable égal à celui de la Terre, ce volume comprenant toutes les mers et les vallées de la Terre remplies de sable jusqu'aux plus hautes montagnes, il est évident qu'ils reconnaîtraient encore beaucoup moins qu'on puisse énoncer un nombre dépassant le nombre de ces grains de sable. Or je tâcherai de te montrer, par des démonstrations géométriques que tu pourras suivre, que, parmi les nombres que j'ai énoncés et exposés dans mes écrits adressés à Zeuxippe, il y en a qui dépassent non seulement le nombre de grains de sable dont le volume serait égal à celui de la Terre remplie de la matière que nous avons indiquée, mais même ayant un volume égal à celui du monde. »

C'est ainsi qu'Archimède (287–212 avant notre ère) commence son ouvrage intitulé *l'Arénaire*. C'est le premier texte de vulgarisation scientifique et, selon moi, c'est aussi l'un des meilleurs jamais écrits. Dans cet article adressé à son roi, Archimède contredit la notion, fréquente à son époque, d'un nombre de grains de sable infini ou trop grand pour être évalué. Cette notion est présente dans la littérature grecque ; par exemple, au V^e siècle avant notre ère, Pindare écrit dans son *Deuxième chant olympique* : « Mais le sable échappe au calcul : les joies aussi que cet homme a données aux autres, qui pourrait en dire le nombre ? » L'idée est également présente dans la Bible, où il y a 21 références à la non-dénombrabilité du sable.

Toutefois, si l'humanité a bien accepté les résultats d'Archimède (chacun sait que π est égal à 3,14...), son article le plus accessible, *l'Arénaire*, n'a eu aucun écho à son époque. Par exemple, dans le Nouveau Testament, écrit quelques centaines d'années après la mort d'Archimède, on lit encore que le sable est infini : « Naquirent des descendants comparables par leur nombre aux étoiles du ciel et aux grains de sable sur le rivage de la mer, innombrables. » (*Hébreux 11:12.*) Le Nouveau Testa-

ment ignore les progrès des sciences : on estime facilement que le nombre d'étoiles visibles à l'œil nu est inférieur à 10 000, ce qui était connu des astronomes de l'époque (comme en témoignent le catalogue d'étoiles d'Ératosthène, qui date du II^e siècle avant notre ère, et celui de Ptolémée, au II^e siècle de notre ère).

Dans son article, Archimède démontre que le nombre de grains de sable est fini, en donnant un nombre fini supérieur au nombre de grains de sable dans un univers rempli de sable. D'abord, il se demande ce qu'est l'«Univers» : pour être certain de ne pas être réfuté, Archimède choisit le plus grand modèle connu alors, le système héliocentrique d'Aristarque. Cette partie de *l'Arénaire* est physique et expérimentale. Puis Archimède propose un système de numération qui est capable de produire des nombres très grands : c'est la partie arithmétique de l'article.

L'Arénaire montre également que les Grecs n'ont pas tous été férus d'abstraction, contrairement à ce qu'ont prétendu des historiens : l'ouvrage décrit une expérience astronomique stipulant que la Terre est ronde et tourne autour du Soleil, et Archimède y aborde la question des