

Archimède face à l'innombrable

ILAN VARDI

Archimède a inventé une notation pour compter de très grands nombres, mais une question reste ouverte : pourquoi s'est-il arrêté à son «plus grand nombre»?



«Certains estiment, roi Gélon, que le nombre de grains de sable est infiniment grand, et j'entends non seulement le sable des environs de Syracuse et du reste de la Sicile, mais encore celui qui est répandu dans toute la Terre, habitée ou inculte. D'autres, tout en admettant que ce nombre n'est pas infiniment grand, pensent qu'il n'existe pas de nombre exprimable assez grand pour dépasser la quantité de sable. Cependant, si ceux qui sont de cet avis s'imaginaient un volume de sable égal à celui de la Terre, ce volume comprenant toutes les mers et les vallées de la Terre remplies de sable jusqu'aux plus hautes montagnes, il est évident qu'ils reconnaîtraient encore beaucoup moins qu'on puisse énoncer un nombre dépassant le nombre de ces grains de sable. Or je tâcherai de te montrer, par des démonstrations géométriques que tu pourras suivre, que, parmi les nombres que j'ai énoncés et exposés dans mes écrits adressés à Zeuxippe, il y en a qui dépassent non seulement le nombre de grains de sable dont le volume serait égal à celui de la Terre remplie de la matière que nous avons indiquée, mais même ayant un volume égal à celui du monde.»

C'est ainsi qu'Archimède (287–212 avant notre ère) commence son ouvrage intitulé *l'Arénaire*. C'est le premier texte de vulgarisation scientifique et, selon moi, c'est aussi l'un des meilleurs jamais écrits. Dans cet article adressé à son roi, Archimède contredit la notion, fréquente à son époque, d'un nombre de grains de sable infini ou trop grand pour être évalué. Cette notion est présente dans la littérature grecque ; par exemple, au V^e siècle avant notre ère, Pindare écrit dans son *Deuxième chant olympique* : «Mais le sable échappe au calcul : les joies aussi que cet homme a données aux autres, qui pourrait en dire le nombre?» L'idée est également présente dans la Bible, où il y a 21 références à la non-dénombrabilité du sable.

Toutefois, si l'humanité a bien accepté les résultats d'Archimède (chacun sait que π est égal à 3,14...), son article le plus accessible, *l'Arénaire*, n'a eu aucun écho à son époque. Par exemple, dans le Nouveau Testament, écrit quelques centaines d'années après la mort d'Archimède, on lit encore que le sable est infini : «Naquirent des descendants comparables par leur nombre aux étoiles du ciel et aux grains de sable sur le rivage de la mer, innombrables.» (*Hébreux 11:12.*) Le Nouveau Testa-

ment ignore les progrès des sciences : on estime facilement que le nombre d'étoiles visibles à l'œil nu est inférieur à 10 000, ce qui était connu des astronomes de l'époque (comme en témoignent le catalogue d'étoiles d'Ératosthène, qui date du II^e siècle avant notre ère, et celui de Ptolémée, au II^e siècle de notre ère).

Dans son article, Archimède démontre que le nombre de grains de sable est fini, en donnant un nombre fini supérieur au nombre de grains de sable dans un univers rempli de sable. D'abord, il se demande ce qu'est l'«Univers» : pour être certain de ne pas être réfuté, Archimède choisit le plus grand modèle connu alors, le système héliocentrique d'Aristarque. Cette partie de *l'Arénaire* est physique et expérimentale. Puis Archimède propose un système de numération qui est capable de produire des nombres très grands : c'est la partie arithmétique de l'article.

L'Arénaire montre également que les Grecs n'ont pas tous été férus d'abstraction, contrairement à ce qu'ont prétendu des historiens : l'ouvrage décrit une expérience astronomique stipulant que la Terre est ronde et tourne autour du Soleil, et Archimède y aborde la question des

nombre très grands, mais finis. Nous examinerons ici le système de numération mis au point par Archimède et son application au problème du dénombrement du sable. Nous chercherons aussi pourquoi Archimède s'est arrêté à son «plus grand nombre».

Les nombres d'Archimède

Le dénombrement du sable était très difficile à l'époque d'Archimède, parce que le système de numération grec ne désignait pas les nombres supérieurs à 100 millions et que les Grecs ne disposaient pas d'un système formel, telle l'algèbre, pour écrire et manipuler les grands nombres. Les Grecs comptaient à l'aide de la myriade, égale à 10 000, et leur plus grand nombre était la myriade de myriades. Ce nombre apparaissait deux fois dans la Bible.

Pour compter, Archimède commence donc par produire des nombres plus grands que la myriade de myriades. Il nomme «premiers nombres» les nombres compris entre 1 et la myriade de myriades (ce qui crée, même en grec, une confusion avec les nombres premiers 2, 3, 5, ...). Puis il définit les «deuxièmes nombres», dont l'unité est la myriade de myriades, et dont le plus grand est une myriade de myriade d'unités.

Ensuite viennent les «troisièmes nombres», et ainsi de suite jusqu'aux myriades de myriadièmes nombres.

Pour le calcul des grains de sable, ces nombres suffisent largement, mais Archimède veut démontrer qu'il peut aller plus loin et, surtout, plus loin qu'il n'est nécessaire pour les applications physiques : il nomme «nombres de la première période» la suite des nombres construits jusqu'à la myriade de myriadièmes nombres.

Puis il continue, en nommant «unité de la seconde période» le plus grand nombre de la première période, et ainsi jusqu'à la myriade de myriadième période. Il s'arrête au plus grand nombre : une myriade de myriades unités des myriades de myriadièmes nombres de la myriade de myriadième période. Comment calcule-t-on le nombre de grains de sable dans un univers rempli de sable avec les hypothèses d'Archimède et son système de numération ?

Pour trouver la réponse, on doit utiliser une méthode de multiplication des «nombres d'Archimède», qu'Archimède donnait ainsi : «Si des nombres sont en proportion à partir de l'unité et que certains de ceux qui sont dans la même proportion sont multipliés entre eux, le produit sera dans la même proportion éloigné du plus grand des

facteurs d'autant de nombres dont le plus petit facteur est éloigné, en proportion, de l'unité, et il sera éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les facteurs sont éloignés à l'unité.»

Un tel énoncé paraît confus ; il montre surtout combien on exprime difficilement les concepts mathématiques quand on ne dispose pas de la notation symbolique de l'algèbre. Traduisons cet énoncé en termes modernes (voir la figure 1).

Soit Ω la myriade de myriades, égale à 100 000 000, ou 10^8 en notation scientifique. Les premiers nombres sont l'ensemble $\{1, \dots, \Omega\}$. Les deuxièmes nombres sont l'ensemble $\{\Omega, \dots, \Omega^2\}$, les troisièmes nombres sont $\{\Omega^2, \Omega^2 + 1, \dots, \Omega^3\}$, et ainsi de suite. Les n -ièmes nombres, par exemple, sont l'ensemble $\{\Omega^{n-1}, \Omega^{n-1} + 1, \dots, \Omega^n\}$. Aussi les myriades de myriadièmes nombres sont l'ensemble $\{\Omega^{\Omega-1}, \Omega^{\Omega-1} + 1, \dots, \Omega^\Omega\}$.

Le nombre le plus grand ainsi construit est Ω^Ω . Le résultat est général : étant donné un nouveau symbole de numération A , on devrait pouvoir compter jusqu'à A^A : on forme la suite $A_1=A, A_2=A^2, A_3=A^3, \dots$ et le plus grand nombre avec un seul indice est $A_A=A^A$.

Ainsi, notre système de numération moderne pour les grands nombres



1. L'ŒUVRE D'ARCHIMÈDE a été retranscrite en 1270 par William de Moerbeke (à gauche). La traduction, en latin, de cette œuvre en a favorisé la diffusion, en Europe, auprès des lettrés du XIII^e siècle. D'autres traductions (au centre) ont suivi, par exemple celle de Jacobus Cremoniensis, qui date de 1458. Un manuscrit (à droite) a été découvert

en 1899, à Jérusalem. Il s'agit d'un parchemin où était écrit un texte d'Archimède intitulé «La méthode», que l'on avait cru disparu. Le texte d'origine avait été partiellement effacé et un texte religieux réécrit par dessus. Ce palimpseste, qui date du X^e siècle, a été retrouvé et vendu aux enchères, en 1998, à un inconnu, pour deux millions de dollars.