

nombre très grands, mais finis. Nous examinerons ici le système de numération mis au point par Archimède et son application au problème du dénombrement du sable. Nous chercherons aussi pourquoi Archimède s'est arrêté à son «plus grand nombre».

Les nombres d'Archimède

Le dénombrement du sable était très difficile à l'époque d'Archimède, parce que le système de numération grec ne désignait pas les nombres supérieurs à 100 millions et que les Grecs ne disposaient pas d'un système formel, telle l'algèbre, pour écrire et manipuler les grands nombres. Les Grecs comptaient à l'aide de la myriade, égale à 10 000, et leur plus grand nombre était la myriade de myriades. Ce nombre apparaît deux fois dans la Bible.

Pour compter, Archimède commence donc par produire des nombres plus grands que la myriade de myriades. Il nomme «premiers nombres» les nombres compris entre 1 et la myriade de myriades (ce qui crée, même en grec, une confusion avec les nombres premiers 2, 3, 5, ...). Puis il définit les «deuxièmes nombres», dont l'unité est la myriade de myriades, et dont le plus grand est une myriade de myriade d'unités.

Ensuite viennent les «troisièmes nombres», et ainsi de suite jusqu'aux myriades de myriadièmes nombres.

Pour le calcul des grains de sable, ces nombres suffisent largement, mais Archimède veut démontrer qu'il peut aller plus loin et, surtout, plus loin qu'il n'est nécessaire pour les applications physiques : il nomme «nombres de la première période» la suite des nombres construits jusqu'à la myriade de myriadièmes nombres.

Puis il continue, en nommant «unité de la seconde période» le plus grand nombre de la première période, et ainsi jusqu'à la myriade de myriadième période. Il s'arrête au plus grand nombre : une myriade de myriades unités des myriades de myriadièmes nombres de la myriade de myriadième période. Comment calcule-t-on le nombre de grains de sable dans un univers rempli de sable avec les hypothèses d'Archimède et son système de numération ?

Pour trouver la réponse, on doit utiliser une méthode de multiplication des «nombres d'Archimède», qu'Archimède donnait ainsi : «Si des nombres sont en proportion à partir de l'unité et que certains de ceux qui sont dans la même proportion sont multipliés entre eux, le produit sera dans la même proportion éloigné du plus grand des

facteurs d'autant de nombres dont le plus petit facteur est éloigné, en proportion, de l'unité, et il sera éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les facteurs sont éloignés à l'unité.»

Un tel énoncé paraît confus ; il montre surtout combien on exprime difficilement les concepts mathématiques quand on ne dispose pas de la notation symbolique de l'algèbre. Traduisons cet énoncé en termes modernes (voir la figure 1).

Soit Ω la myriade de myriades, égale à 100 000 000, ou 10^8 en notation scientifique. Les premiers nombres sont l'ensemble $\{1, \dots, \Omega\}$. Les deuxièmes nombres sont l'ensemble $\{\Omega, \dots, \Omega^2\}$, les troisièmes nombres sont $\{\Omega^2, \Omega^2 + 1, \dots, \Omega^3\}$, et ainsi de suite. Les n -ièmes nombres, par exemple, sont l'ensemble $\{\Omega^{n-1}, \Omega^{n-1} + 1, \dots, \Omega^n\}$. Aussi les myriades de myriadièmes nombres sont l'ensemble $\{\Omega^{\Omega-1}, \Omega^{\Omega-1} + 1, \dots, \Omega^\Omega\}$.

Le nombre le plus grand ainsi construit est Ω^Ω . Le résultat est général : étant donné un nouveau symbole de numération A , on devrait pouvoir compter jusqu'à A^A : on forme la suite $A_1=A, A_2=A^2, A_3=A^3, \dots$ et le plus grand nombre avec un seul indice est $A_A=A^A$.

Ainsi, notre système de numération moderne pour les grands nombres



1. L'ŒUVRE D'ARCHIMÈDE a été retranscrite en 1270 par William de Moerbeke (à gauche). La traduction, en latin, de cette œuvre en a favorisé la diffusion, en Europe, auprès des lettrés du XIII^e siècle. D'autres traductions (au centre) ont suivi, par exemple celle de Jacobus Cremonensis, qui date de 1458. Un manuscrit (à droite) a été découvert

en 1899, à Jérusalem. Il s'agit d'un parchemin où était écrit un texte d'Archimède intitulé «La méthode», que l'on avait cru disparu. Le texte d'origine avait été partiellement effacé et un texte religieux réécrit par dessus. Ce palimpseste, qui date du X^e siècle, a été retrouvé et vendu aux enchères, en 1998, à un inconnu, pour deux millions de dollars.

Première période	Deuxième période	...	Ω ième période
Premiers nombres $1, \dots, \Omega$	Premiers nombres $\Pi, \dots, \Omega\Pi$		Premiers nombres $\Pi^{\Omega-1}, \dots, \Omega\Pi^{\Omega-1}$
Deuxièmes nombres $\Omega, \dots, \Omega^2$	Deuxièmes nombres $\Omega\Pi, \dots, \Omega^2\Pi$		Deuxièmes nombres $\Omega\Pi^{\Omega-1}, \dots, \Omega^2\Pi^{\Omega-1}$
Troisièmes nombres $\Omega^2, \dots, \Omega^3$	Troisièmes nombres $\Omega^2\Pi, \dots, \Omega^3\Pi$		Troisièmes nombres $\Omega^2\Pi^{\Omega-1}, \dots, \Omega^3\Pi^{\Omega-1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n èmes nombres $\Omega^{n-1}, \dots, \Omega^n$	n èmes nombres $\Omega^{n-1}\Pi, \dots, \Omega^n\Pi$		n èmes nombres $\Omega^{n-1}\Pi^{\Omega-1}, \dots, \Omega^n\Pi^{\Omega-1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
Ω èmes nombres $\Omega^{\Omega-1}, \dots, \Omega^\Omega = \Pi$	Ω èmes nombres $\Omega^{\Omega-1}\Pi, \dots, \Omega^\Omega\Pi = \Pi^2$		Ω èmes nombres $\Omega^{\Omega-1}\Pi^{\Omega-1}, \dots, \Omega^\Omega\Pi^{\Omega-1} = \Pi^\Omega$

2. LE SYSTÈME DE NUMÉRATION d'Archimède était fondé sur la myriade de myriades, égale à 100 000 000 et symbolisée ici par Ω .

est fondé sur celui qui a été proposé par Nicolas Chuquet en 1484 et qui utilise le nouveau symbole *illion*. Ainsi $M=10^6$ est un million, M^2 est un billion, M^3 un trillion, et ainsi de suite : un n -illion est M^n , et le plus grand nombre simple de cette forme est un *million-illion*, soit M^M .

Dans la deuxième étape, Archimède introduit les périodes, dont la base est $\Pi = \Omega^\Omega$, le plus grand nombre construit jusque-là. D'après la remarque précédente, il devrait, en principe, continuer jusqu'à Π^Π . Archimède définit les premiers nombres de la seconde période comme l'ensemble $\{\Pi, \dots, \Omega\Pi\}$, les seconds nombres de la seconde période $\{\Omega\Pi, \dots, \Omega^2\Pi\}$, et ainsi de suite. C'est-à-dire que les n -ièmes nombres de la seconde période seront $\{\Omega^{n-1}\Pi, \dots, \Omega^n\Pi\}$. Et les Ω -ièmes nombres de la seconde période seront l'ensemble $\{\Omega^{\Omega-1}\Pi, \dots, \Omega^\Omega\Pi = \Pi^2\}$.

Maintenant, Π^2 est pris comme l'unité des nombres de la troisième période, qui seront donc l'ensemble $\{\Pi^2, \dots, \Pi^3\}$. De la même façon, les nombres de la n -ième période seront l'ensemble $\{\Pi^{n-1}, \dots, \Pi^n\}$, et Archimède continue jusqu'à Π^Ω , le plus grand nombre nommé dans son système.

En notation moderne, ce nombre est égal à : $\Pi^\Omega = (\Omega^\Omega)^\Omega = \Omega^{2^\Omega} = (10^8)^{10^8 \cdot 10^8} = 10^{8 \cdot 10^{16}}$, soit 10 à la puissance 80 millions de milliards.

Dans ce système, la loi des exposants est un peu compliquée par les choix d'Archimède : elle revient à dire que le produit de l'unité des m -ièmes nombres et de l'unité des n -ièmes

nombres est l'unité des $m+n-1$ -ièmes nombres. Archimède en donne une démonstration grecque, est un exemple simple qui contient toutes les idées de la preuve.

À la recherche de la période perdue

Le nombre Π^Ω est souvent cité comme le plus grand nombre considéré dans l'Antiquité, mais personne n'a expliqué pourquoi Archimède s'est arrêté à lui. Vraisemblablement, il aurait dû continuer jusqu'à $\Pi^\Pi = (\Omega^\Omega)^{\Omega^\Omega} = \Omega^{\Omega^{\Omega+1}}$ qui est bien supérieur à 10 à la puissance 10 à la puissance 10 à la puissance 8, tandis que le «plus grand nombre» d'Archimède est inférieur à $10^{10^{17}}$. Le mystère me semble découler des particularités du grec ancien et du manque de flexibilité du système d'Archimède : d'abord, soulignons qu'il existe une différence subtile, mais importante, entre les nombres cardinaux, qui indiquent la quantité, et les nombres ordinaux, qui indiquent l'ordre.

Ces concepts de la théorie des ensembles existent depuis longtemps dans toutes les langues. En français, le passage du cardinal à l'ordinal consiste à ajouter *ième* au nom du nombre cardinal. En revanche, l'examen des noms de cardinaux et d'ordinaux grecs ne révèle pas que les Grecs disposaient d'un tel algorithme.

Pour comprendre l'importance de ce concept, revenons au système de numération de Chuquet. Il ne s'agit

plus de la suite «un-illion, deux-illion, ..., n -illion», mais de la suite «premier-illion, deuxième-illion, ..., n -ième-illion» : un nouveau symbole A définit une suite $A_1, A_2, \dots$, où les indices sont ordonnés. Pour définir le dernier nombre de cette suite, on doit pouvoir dire *premier-illionième-illion* (par exemple, premier millionième de million). L'algorithme transforme n'importe quel cardinal en ordinal.

Donc, si l'on admet que les Grecs n'avaient pas d'algorithme pour transformer les cardinaux en ordinaux, on conclut qu'Archimède se limitait au nombre ordinal le plus élevé dans sa langue, soit la myriade de myriadième. Autrement dit, le plus grand nombre qu'Archimède aurait pu nommer en utilisant sa langue courante aurait été la myriade de myriadième période, ou Π^Ω .

Pour soutenir cette hypothèse, on remarque qu'Archimède n'avait pas conçu son système pour une utilisation générale, ce qui est encore plus intéressant, puisque de très grands nombres apparaissent aussi dans son «problème des bœufs du Soleil» qui, selon l'*Odyssée* d'Homère, étaient 350. Il s'agit de classer des taureaux blancs, noirs, jaunes et tachetés, avec des vaches des mêmes variétés, en vérifiant des conditions telles que : «Le nombre total de taureaux blancs et noirs doit être un nombre carré», ou : «Le nombre total de taureaux jaunes et tachetés doit être un nombre triangulaire, de la forme $1+2+3+\dots+m$, où m est un entier positif.» Ce problème se ramène à un système de sept équations à huit variables, et une équation dite de Pell.

À la fin de l'*Arénaire*, Archimède écrit : «Un volume myriade de myriade de myriade de fois multiple du volume du monde.» Pour être cohérent, il aurait dû écrire : «Un volume une unité des troisièmes nombres de fois multiple du volume du monde.» Cet exemple illustre un autre problème linguistique dans l'invention de nouveaux nombres : il faut aussi inventer un adjectif pour chaque nombre (une fois, deux fois...).

On pourrait objecter que les ordinaux se disent aussi «numéro un, numéro deux, etc.» et qu'on lit la suite $A_1, A_2, \dots$ comme «A un, A deux...». De surcroît, la table des cardinaux et des ordinaux grecs montre qu'Archimède aurait pu facilement inventer une façon de transformer un cardinal en ordinal. Cependant, c'est ici qu'intervient la

principale faiblesse de son système : Archimède donne des noms à des ensembles de nombres, et non à des nombres eux-mêmes. Ainsi le nombre $\Pi = \Omega^\Omega$ est l'«unité de la deuxième période», et, même en français moderne, il est difficile d'écrire l'ordinal correspondant.

Un thé au harem d'Archimède

Archimède était très isolé, à Syracuse, ce qui explique son originalité : son invention de grands nombres n'a rien en commun avec les mathématiques de son temps. Son isolement est probablement responsable des petites incohérences de son texte : s'il avait pu discuter de son système avec un autre mathématicien, Archimède aurait probablement amélioré ses résultats. Cherchons donc les améliorations qu'Archimède – sans trop le vexer – aurait pu apporter à son «théorème».

Tout d'abord, il aurait dû donner des noms à ses grands nombres. Par exemple, s'il avait nommé Ω^Ω la période, alors Π^Π aurait été la périodième période, qu'Archimède aurait pu nommer, en extrapolant les ordinaux grecs existants. Ainsi le grand nombre Π^Π aurait été atteint.

Cependant, Archimède aurait dû commencer par donner des noms directement à tous ses nouveaux nombres. Une méthode directe aurait consisté à nommer *deuxième myriade* la myriade de myriades ; la *troisième myriade* aurait été la myriade de deuxièmes myriades ; et ainsi de suite jusqu'à la *myriadième myriade*. Cette notation pour les petits cas a été utilisée par Diophante. Elle simplifie la loi des exposants : le produit d'une *m*-ième myriade et d'une *n*-ième myriade est une *m+n*-ième myriade.

Cependant, si le but est seulement de nommer de très grands nombres, et non de donner un système complet de numération, on peut aller beaucoup plus loin. On commence par nommer la myriadième myriade une *grande myriade*. On continue avec la grande myriadième grande myriade, qu'on nomme la *très grande myriade*. La très grande myriadième très grande myriade sera l'*énorme myriade*.

On utilise de nouveau la nomenclature d'Archimède en nommant la grande myriade la *période*, la très grande myriade la *deuxième période*, l'énorme période la *troisième période*. Le procédé conduit à la *périodième*

Le nombre de grains de sable dans l'Univers

Les hypothèses d'Archimède

- Au plus 10 000 grains de sable dans un grain de pavot (sphérique).
- Au plus 40 diamètres de grains de pavot sont contenus dans le diamètre d'un doigt.
- Au plus 10 000 diamètres d'un doigt – au plus – sont dans un stade (une mesure ancienne de distance de l'ordre de 200 mètres).
- La Terre est une sphère dont le périmètre est inférieur à trois millions de stades.
- La distance entre le centre de la Terre et le centre du Soleil est inférieure à 10 000 diamètres de la Terre.
- L'Univers est une sphère, le Soleil est au centre, et la Terre tourne autour du Soleil selon un cercle. Le rapport du diamètre de l'Univers au diamètre de l'orbite de la Terre autour du Soleil est inférieur au rapport entre le diamètre de l'orbite de la Terre et son diamètre.
- Le périmètre d'un cercle est supérieur au triple de son diamètre.
- Le volume d'une sphère est proportionnel au cube de son diamètre.

D'après les hypothèses d'Archimède, pourriez-vous trouver une borne supérieure pour le nombre de grains de sable dans un Univers rempli de sable ?

La réponse

1. Soit D_u le diamètre de l'Univers, D_o le diamètre de l'orbite de la Terre autour du Soleil, D_t le diamètre de la Terre.

La dernière hypothèse physique s'écrit : $D_u/D_o < D_o/D_t$.

L'avant-dernière hypothèse affirme que D_o/D_t est inférieur à 10 000, donc $D_u < 10^4 D_o$.

Encore une fois, l'hypothèse $D_o/D_t < 10^4$ donne : $D_u < 10^4 \cdot 10^4 \cdot D_t = 10^8 D_t$.

L'hypothèse sur le périmètre de la Terre donne :

$D_t < 10^6$ stades, en raison de l'avant dernière hypothèse.

Donc : $D_u < 10^8 \cdot 10^6$ stades = 10^{14} stades.

Puisqu'il y a moins de 10 000 diamètres de doigts dans un stade, on a :

$D_u < 10^4 \cdot 10^{14} \cdot D_d = 10^{18} D_d$, où D_d est le diamètre d'un doigt.

Puisqu'il y a moins de 40 diamètres de grains de pavot dans un doigt :

$D_u < 40 \cdot 10^{18} \cdot D_p = 4 \cdot 10^{19} D_p$, où D_p est le diamètre d'un grain de pavot.

D'après la dernière hypothèse, le volume V_u de l'Univers satisfait l'équation :

$V_u < (4 \cdot 10^{19})^3 V_p = 64 \cdot 10^{57} V_p < 10^{59} V_p$, où V_p est le volume d'un grain de pavot..

D'après la première hypothèse, un grain de pavot contient au plus 10^4 grains de sable, donc le nombre de grains de sable dans l'Univers est inférieur à $10^{59} \cdot 10^4$, soit 10^{63} .

Notons que le diamètre maximal de l'Univers, d'après Archimède, est égal à 10^{14} stades. Sachant qu'un stade est environ égal à 200 mètres, on obtient ainsi un rayon de 10^{12} kilomètres environ, soit une année-lumière.

période. Ces périodes croissent beaucoup plus vite que les périodes définies par Archimède, mais ces nouvelles périodes ne sont plus capables d'exprimer tous les nombres.

En notation moderne, une myriade correspond à $\mu = 10^4$, et une grande myriade à $\mu = \mu^\mu = 10^{4 \cdot 10^4}$: c'est la période π_1 . Soit π_2 la deuxième période. En utilisant la formule $(10^a)^b = 10^{ab}$, on trouve : $\pi_2 = \pi_1^{\pi_1} = 10^{4 \cdot 10^4 \cdot (10^{4 \cdot 10^4} + 1)}$, valeur supé-

rieure à 10 à la puissance 10 à la puissance 10 000. De même, la troisième période serait supérieure à 10 à la puissance 10 à la puissance 10 à la puissance 10 000. En général, la périodième période est d'un ordre de grandeur bien supérieur aux nombres conçus par Archimède. Ainsi, on peut calculer que la périodième période a une valeur supérieure à celle d'une tour de puissances de 10 à 40 000 étages.

Ilan VARDI est mathématicien à l'Institut des hautes études scientifiques, IHES, à Bures-sur-Yvette.

<http://www.ihes.fr/~ilan/archimedes.html>

Archimède, *Cœuvres*, texte établi et traduit par C. Mugler, Les Belles Lettres,

Paris, 1970-1971.

I. VARDI, *Archimedes' Cattle Problem*, in *American Mathematical Monthly*, vol. 105, pp. 305-319, 1998.

Le thé au harem d'Archimède, film de Mehdi Charef, 1985.