

principale faiblesse de son système : Archimède donne des noms à des ensembles de nombres, et non à des nombres eux-mêmes. Ainsi le nombre $\Pi = \Omega^\Omega$ est l'«unité de la deuxième période», et, même en français moderne, il est difficile d'écrire l'ordinal correspondant.

Un thé au harem d'Archimède

Archimède était très isolé, à Syracuse, ce qui explique son originalité : son invention de grands nombres n'a rien en commun avec les mathématiques de son temps. Son isolement est probablement responsable des petites incohérences de son texte : s'il avait pu discuter de son système avec un autre mathématicien, Archimède aurait probablement amélioré ses résultats. Cherchons donc les améliorations qu'Archimède – sans trop le vexer – aurait pu apporter à son «théorème».

Tout d'abord, il aurait dû donner des noms à ses grands nombres. Par exemple, s'il avait nommé Ω^Ω la période, alors Π^Π aurait été la périodième période, qu'Archimède aurait pu nommer, en extrapolant les ordinaux grecs existants. Ainsi le grand nombre Π^Π aurait été atteint.

Cependant, Archimède aurait dû commencer par donner des noms directement à tous ses nouveaux nombres. Une méthode directe aurait consisté à nommer *deuxième myriade* la myriade de myriades ; la *troisième myriade* aurait été la myriade de deuxièmes myriades ; et ainsi de suite jusqu'à la *myriadième myriade*. Cette notation pour les petits cas a été utilisée par Diophante. Elle simplifie la loi des exposants : le produit d'une *m*-ième myriade et d'une *n*-ième myriade est une *m+n*-ième myriade.

Cependant, si le but est seulement de nommer de très grands nombres, et non de donner un système complet de numération, on peut aller beaucoup plus loin. On commence par nommer la myriadième myriade une *grande myriade*. On continue avec la grande myriadième grande myriade, qu'on nomme la *très grande myriade*. La très grande myriadième très grande myriade sera l'*énorme myriade*.

On utilise de nouveau la nomenclature d'Archimède en nommant la grande myriade la *période*, la très grande myriade la *deuxième période*, l'énorme période la *troisième période*. Le procédé conduit à la *périodième*

Le nombre de grains de sable dans l'Univers

Les hypothèses d'Archimède

- Au plus 10 000 grains de sable dans un grain de pavot (sphérique).
- Au plus 40 diamètres de grains de pavot sont contenus dans le diamètre d'un doigt.
- Au plus 10 000 diamètres d'un doigt – au plus – sont dans un stade (une mesure ancienne de distance de l'ordre de 200 mètres).
- La Terre est une sphère dont le périmètre est inférieur à trois millions de stades.
- La distance entre le centre de la Terre et le centre du Soleil est inférieure à 10 000 diamètres de la Terre.
- L'Univers est une sphère, le Soleil est au centre, et la Terre tourne autour du Soleil selon un cercle. Le rapport du diamètre de l'Univers au diamètre de l'orbite de la Terre autour du Soleil est inférieur au rapport entre le diamètre de l'orbite de la Terre et son diamètre.
- Le périmètre d'un cercle est supérieur au triple de son diamètre.
- Le volume d'une sphère est proportionnel au cube de son diamètre.

D'après les hypothèses d'Archimède, pourriez-vous trouver une borne supérieure pour le nombre de grains de sable dans un Univers rempli de sable ?

La réponse

1. Soit D_u le diamètre de l'Univers, D_o le diamètre de l'orbite de la Terre autour du Soleil, D_t le diamètre de la Terre.

La dernière hypothèse physique s'écrit : $D_u/D_o < D_o/D_t$.

L'avant-dernière hypothèse affirme que D_o/D_t est inférieur à 10 000, donc $D_u < 10^4 D_o$.

Encore une fois, l'hypothèse $D_o/D_t < 10^4$ donne : $D_u < 10^4 \cdot 10^4 \cdot D_t = 10^8 D_t$.

L'hypothèse sur le périmètre de la Terre donne :

$D_t < 10^6$ stades, en raison de l'avant dernière hypothèse.

Donc : $D_u < 10^8 \cdot 10^6$ stades = 10^{14} stades.

Puisqu'il y a moins de 10 000 diamètres de doigts dans un stade, on a :

$D_u < 10^4 \cdot 10^{14} \cdot D_d = 10^{18} D_d$, où D_d est le diamètre d'un doigt.

Puisqu'il y a moins de 40 diamètres de grains de pavot dans un doigt :

$D_u < 40 \cdot 10^{18} \cdot D_p = 4 \cdot 10^{19} D_p$, où D_p est le diamètre d'un grain de pavot.

D'après la dernière hypothèse, le volume V_u de l'Univers satisfait l'équation :

$V_u < (4 \cdot 10^{19})^3 V_p = 64 \cdot 10^{57} V_p < 10^{59} V_p$, où V_p est le volume d'un grain de pavot..

D'après la première hypothèse, un grain de pavot contient au plus 10^4 grains de sable, donc le nombre de grains de sable dans l'Univers est inférieur à $10^{59} \cdot 10^4$, soit 10^{63} .

Notons que le diamètre maximal de l'Univers, d'après Archimède, est égal à 10^{14} stades. Sachant qu'un stade est environ égal à 200 mètres, on obtient ainsi un rayon de 10^{12} kilomètres environ, soit une année-lumière.

période. Ces périodes croissent beaucoup plus vite que les périodes définies par Archimède, mais ces nouvelles périodes ne sont plus capables d'exprimer tous les nombres.

En notation moderne, une myriade correspond à $\mu = 10^4$, et une grande myriade à $\mu = \mu^\mu = 10^{4 \cdot 10^4}$: c'est la période π_1 . Soit π_2 la deuxième période. En utilisant la formule $(10^a)^b = 10^{ab}$, on trouve : $\pi_2 = \pi_1^{\pi_1} = 10^{4 \cdot 10^4 \cdot (10^{4 \cdot 10^4} + 1)}$, valeur supé-

rieure à 10 à la puissance 10 à la puissance 10 000. De même, la troisième période serait supérieure à 10 à la puissance 10 à la puissance 10 à la puissance 10 000. En général, la périodième période est d'un ordre de grandeur bien supérieur aux nombres conçus par Archimède. Ainsi, on peut calculer que la périodième période a une valeur supérieure à celle d'une tour de puissances de 10 à 40 000 étages.

Ilan VARDI est mathématicien à l'Institut des hautes études scientifiques, IHES, à Bures-sur-Yvette.
<http://www.ihes.fr/~ilan/archimedes.html>

Archimède, *Cœuvres*, texte établi et traduit par C. Mugler, Les Belles Lettres,

Paris, 1970-1971.

I. VARDI, *Archimedes' Cattle Problem*, in *American Mathematical Monthly*, vol. 105, pp. 305-319, 1998.

Le thé au harem d'Archimède, film de Mehdi Charef, 1985.