

principale faiblesse de son système : Archimède donne des noms à des ensembles de nombres, et non à des nombres eux-mêmes. Ainsi le nombre $\Pi = \Omega^\Omega$ est l'«unité de la deuxième période», et, même en français moderne, il est difficile d'écrire l'ordinal correspondant.

Un thé au harem d'Archimède

Archimède était très isolé, à Syracuse, ce qui explique son originalité : son invention de grands nombres n'a rien en commun avec les mathématiques de son temps. Son isolement est probablement responsable des petites incohérences de son texte : s'il avait pu discuter de son système avec un autre mathématicien, Archimède aurait probablement amélioré ses résultats. Cherchons donc les améliorations qu'Archimède – sans trop le vexer – aurait pu apporter à son «théorème».

Tout d'abord, il aurait dû donner des noms à ses grands nombres. Par exemple, s'il avait nommé Ω^Ω la période, alors Π^Π aurait été la périodième période, qu'Archimède aurait pu nommer, en extrapolant les ordinaux grecs existants. Ainsi le grand nombre Π^Π aurait été atteint.

Cependant, Archimède aurait dû commencer par donner des noms directement à tous ses nouveaux nombres. Une méthode directe aurait consisté à nommer *deuxième myriade* la myriade de myriades ; la *troisième myriade* aurait été la myriade de deuxièmes myriades ; et ainsi de suite jusqu'à la *myriadième myriade*. Cette notation pour les petits cas a été utilisée par Diophante. Elle simplifie la loi des exposants : le produit d'une *m*-ième myriade et d'une *n*-ième myriade est une *m+n*-ième myriade.

Cependant, si le but est seulement de nommer de très grands nombres, et non de donner un système complet de numération, on peut aller beaucoup plus loin. On commence par nommer la myriadième myriade une *grande myriade*. On continue avec la grande myriadième grande myriade, qu'on nomme la *très grande myriade*. La très grande myriadième très grande myriade sera l'*énorme myriade*.

On utilise de nouveau la nomenclature d'Archimède en nommant la grande myriade la *période*, la très grande myriade la *deuxième période*, l'énorme période la *troisième période*. Le procédé conduit à la *périodième*

Le nombre de grains de sable dans l'Univers

Les hypothèses d'Archimède

- Au plus 10 000 grains de sable dans un grain de pavot (sphérique).
- Au plus 40 diamètres de grains de pavot sont contenus dans le diamètre d'un doigt.
- Au plus 10 000 diamètres d'un doigt – au plus – sont dans un stade (une mesure ancienne de distance de l'ordre de 200 mètres).
- La Terre est une sphère dont le périmètre est inférieur à trois millions de stades.
- La distance entre le centre de la Terre et le centre du Soleil est inférieure à 10 000 diamètres de la Terre.
- L'Univers est une sphère, le Soleil est au centre, et la Terre tourne autour du Soleil selon un cercle. Le rapport du diamètre de l'Univers au diamètre de l'orbite de la Terre autour du Soleil est inférieur au rapport entre le diamètre de l'orbite de la Terre et son diamètre.
- Le périmètre d'un cercle est supérieur au triple de son diamètre.
- Le volume d'une sphère est proportionnel au cube de son diamètre.

D'après les hypothèses d'Archimède, pourriez-vous trouver une borne supérieure pour le nombre de grains de sable dans un Univers rempli de sable ?

La réponse

1. Soit D_u le diamètre de l'Univers, D_o le diamètre de l'orbite de la Terre autour du Soleil, D_t le diamètre de la Terre.

La dernière hypothèse physique s'écrit : $D_u/D_o < D_o/D_t$.

L'avant-dernière hypothèse affirme que D_o/D_t est inférieur à 10 000, donc $D_u < 10^4 D_o$.

Encore une fois, l'hypothèse $D_o/D_t < 10^4$ donne : $D_u < 10^4 \cdot 10^4 \cdot D_t = 10^8 D_t$.

L'hypothèse sur le périmètre de la Terre donne :

$D_t < 10^6$ stades, en raison de l'avant dernière hypothèse.

Donc : $D_u < 10^8 \cdot 10^6$ stades = 10^{14} stades.

Puisqu'il y a moins de 10 000 diamètres de doigts dans un stade, on a :

$D_u < 10^4 \cdot 10^{14} \cdot D_d = 10^{18} D_d$, où D_d est le diamètre d'un doigt.

Puisqu'il y a moins de 40 diamètres de grains de pavot dans un doigt :

$D_u < 40 \cdot 10^{18} \cdot D_p = 4 \cdot 10^{19} D_p$, où D_p est le diamètre d'un grain de pavot.

D'après la dernière hypothèse, le volume V_u de l'Univers satisfait l'équation :

$V_u < (4 \cdot 10^{19})^3 V_p = 64 \cdot 10^{57} V_p < 10^{59} V_p$, où V_p est le volume d'un grain de pavot..

D'après la première hypothèse, un grain de pavot contient au plus 10^4 grains de sable, donc le nombre de grains de sable dans l'Univers est inférieur à $10^{59} \cdot 10^4$, soit 10^{63} .

Notons que le diamètre maximal de l'Univers, d'après Archimède, est égal à 10^{14} stades. Sachant qu'un stade est environ égal à 200 mètres, on obtient ainsi un rayon de 10^{12} kilomètres environ, soit une année-lumière.

période. Ces périodes croissent beaucoup plus vite que les périodes définies par Archimède, mais ces nouvelles périodes ne sont plus capables d'exprimer tous les nombres.

En notation moderne, une myriade correspond à $\mu = 10^4$, et une grande myriade à $\mu = \mu^\mu = 10^{4 \cdot 10^4}$: c'est la période π_1 . Soit π_2 la deuxième période. En utilisant la formule $(10^a)^b = 10^{ab}$, on trouve : $\pi_2 = \pi_1^{\pi_1} = 10^{4 \cdot 10^4 \cdot (10^4 + 1)}$, valeur supé-

rieure à 10 à la puissance 10 à la puissance 10 000. De même, la troisième période serait supérieure à 10 à la puissance 10 à la puissance 10 à la puissance 10 000. En général, la périodième période est d'un ordre de grandeur bien supérieur aux nombres conçus par Archimède. Ainsi, on peut calculer que la périodième période a une valeur supérieure à celle d'une tour de puissances de 10 à 40 000 étages.

Ilan VARDI est mathématicien à l'Institut des hautes études scientifiques, IHES, à Bures-sur-Yvette.

<http://www.ihes.fr/~ilan/archimedes.html>

Archimède, *Cœuvres*, texte établi et traduit par C. Mugler, Les Belles Lettres,

Paris, 1970-1971.

I. VARDI, *Archimedes' Cattle Problem*, in *American Mathematical Monthly*, vol. 105, pp. 305-319, 1998.

Le thé au harem d'Archimède, film de Mehdi Charef, 1985.

L'infini en Chine

JEAN-CLAUDE MARTZLOFF

Le calcul numérique a joué un rôle clé dans la perception que la Chine a eu de l'infini.



Wang Anjie, Jiezi yuan huazhuan (Manuel de peinture du jardin de grains de moutarde)

En Chine, l'infini et l'indéfiniment grand ou l'indéfiniment petit ont surtout été abordés à propos de problèmes de dialectique, de mathématiques, de cosmologie ou de synchronisation des cycles planétaires. À chaque fois, ces problèmes ont été traités pour eux-mêmes. Bien qu'il existe ailleurs, ce mode de perception de l'infini domine en Chine. Il s'oppose à celui des autres grandes civilisations de l'Antiquité et du Moyen Âge, qui ont plutôt abordé l'infini au travers de la métaphysique.

Au III^e siècle avant notre ère, les logiciens chinois élaborent des paradoxes qui rappellent les idées des sophistes grecs de la même époque. En Chine, ils sont les premiers à s'intéresser à la notion d'infini. Puis, au premier millénaire de notre ère, les traductions chinoises de centaines de textes indiens de théologie bouddhique propagent l'idée d'un monde infini, sans origine ni fin, qui évolue au rythme du cycle des réincarnations, répétées à l'infini. Les Chinois inventent des systèmes de notation pour représenter des nombres très grands ou très petits, correspondant aux intervalles de temps qui interviennent dans ce cycle.

Parallèlement, les mathématiciens chinois calculent la valeur approchée de π , établissent les formules de l'aire du cercle, du volume de la sphère et de la pyramide. Ils utilisent des raisonnements similaires à ceux, antérieurs, des mathématiciens grecs. On ignore si ces raisonnements sont issus exclusivement de la pensée chinoise ou empruntés à la civilisation hellénistique, dont les idées auraient atteint la Chine par la route de la soie, soit directement, soit indirectement, en passant d'abord par l'Inde.

Les cosmologistes, les astrologues et les astronomes s'interrogent sur l'infinité spatiale ou temporelle de l'Univers. Pour déterminer la Grande Origine (l'origine commune des cycles solaires, lunaires, planétaires et calendaires), ils font des calculs avec de très grands nombres, qui rappellent la «grande année» platonicienne.

Sophistes et mathématiciens

La dynastie Zhou s'affaiblit à l'époque des «Royaumes Combattants» (de 403 à 222 avant notre

ère), marquée par des guerres incessantes. Pendant cette période troublée, des penseurs s'intéressent à la logique et à la dialectique. Des rhétoriciens, conseillers des princes, essaient de trouver les limites du langage à partir de paradoxes dont quelques-uns mettent en jeu l'infini, ou plus exactement l'illimité, le non-borné. À la fin du IV^e siècle avant notre ère, Hui Shi, Premier ministre du roi Hui de Wei, rhétoricien et auteur d'un code de lois aujourd'hui perdu, illustre l'infinité divisibilité spatiale d'un segment de droite par dichotomie : «Il restera toujours quelque chose d'un bâton d'un pied [de longueur] dont on prend chaque jour la moitié, même au bout de dix mille générations.» Son raisonnement est similaire à celui du sophiste grec Zénon d'Élée, selon lequel une flèche ne parvient jamais à son but, car elle doit d'abord parcourir la moitié de la distance qui l'en sépare, puis la moitié de la moitié, et ainsi de suite. Hui Shi affirme même qu'il est à la fois impossible et possible d'accumuler l'infinitement petit : «Ce qui n'a pas de dimension ne peut pas être accumulé,



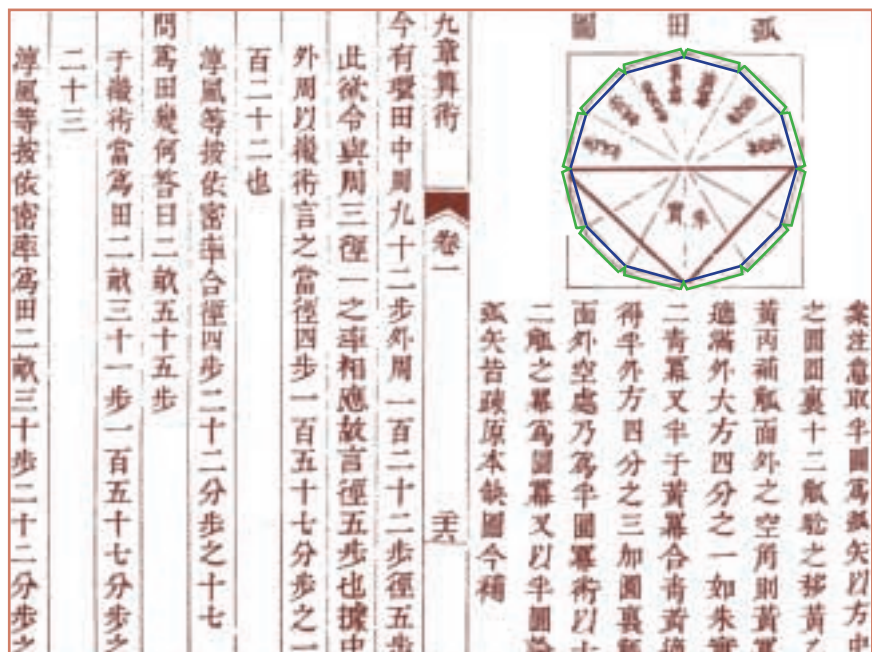
1. PORTRAIT IMAGINAIRE du mathématicien Liu Hui, peint par Jiang Zhaohe, à Pékin, en 1980. Même s'il ne s'appuie sur aucun document historique, ce portrait donne un visage à un «héros national» : le père des mathématiques chinoises. Les Chinois se sont intéressés à l'infini par l'intermédiaire des grands nombres, tel le nombre de configurations possibles d'un échiquier de *weiqi*, ce dernier mot signifiant échecs par encerclement (un jeu plus connu sous son nom japonais de *go*, ci-dessus).

mais finit pourtant par atteindre un millier de li [le li est une unité de mesure chinoise].» Toutefois, il n'explique pas ce paradoxe. Les sinologues ont envisagé plusieurs contextes auxquels il pourrait se rapporter : un débat d'atomistes et de non-atomistes sur l'infinie divisibilité des objets du monde matériel, un débat de géomètres sur la dimension du point ou l'épaisseur du plan, une démonstration des limites du langage au moyen de phrases absurdes. Hui Shi entreprend peut-être une sorte de « déconstruction » du langage en juxtaposant des assertions dépourvues de sens, sans rapport les unes avec les autres. Ses phrases à propos de l'infini, rassemblées par Zhuangzi, le maître chinois de l'irrationnel, appuient cette dernière hypothèse : certaines sont effectivement absurdes et, de surcroît, sans rapport ni avec l'infini ni avec l'atomisme (par exemple, « la tortue est plus longue que le serpent » ou encore « un chien blanc est noir »).

À la fin du III^e siècle, l'infini apparaît pour la première fois en Chine, dans sa dimension mathématique, dans un texte de Liu Hui, qui commente les *Neuf Chapitres de procédés calculatoires*. Ce dernier ouvrage contient la synthèse des connaissances mathématiques jusqu'à l'époque des Han antérieurs (de 220 à 206 avant notre ère), la dynastie sous laquelle ils auraient été compilés pour la première fois.

Le mathématicien Liu Hui remarque que la racine carrée de certains nombres ne peut pas se calculer exactement et explique que l'opération se poursuit parfois indéfiniment. Il calcule cette racine chiffre par chiffre et parle des décimales du résultat en ces termes : « Les petits chiffres qui n'ont pas de nom [qui ne sont pas associés à un nom d'unité de mesure] correspondent à des numérateurs de fractions dont les dénominateurs valent successivement 10, 100, 1 000... » Ainsi, il aborde la notion d'infini par l'intermédiaire du calcul et du développement décimal illimité, qu'il a intuitivement découvert.

Liu Hui s'intéresse aussi à des processus algorithmiques susceptibles de se prolonger sans que l'on sache par avance s'ils vont s'arrêter. Sa méthode de calcul de l'aire du cercle et de la valeur de π en est un exemple. Elle consiste à encadrer le cercle entre deux suites illimitées de polygones et de roues dentées à $2n$ côtés, à partir de $n = 3$ (voir la figure 2). Liu Hui affirme qu'à la longue « le polygone se confond



2. L'AIRES DU CERCLE. Au III^e siècle, le mathématicien chinois Liu Hui, dans son commentaire des *Neufs Chapitres de procédés calculatoires* (reproduit ci-dessus), calcule l'aire du cercle en l'encadrant entre deux séries indéfinies de polygones réguliers inscrits (tel le polygone en bleu) et de « roues dentées » (telle la roue en vert). Si P_n = aire du polygone régulier inscrit à n côtés et R_n = aire de la roue dentée à n côtés, alors $P_n < \text{aire du cercle} < R_n = P_n + 2(P_{2n} - P_n)$. Quand n devient assez grand, étant donné les approximations que fait Liu Hui, R_n devient numériquement égal à P_n .

avec le cercle», sans préciser davantage sa pensée. Il veut probablement dire qu'en menant les calculs assez loin il obtient une valeur numérique de l'aire du polygone égale à celle de la roue dentée correspondante. Selon le nombre de chiffres avec lesquels les opérations intermédiaires sont effectuées, la valeur de π obtenue est plus ou moins précise : elle est de 157/50 (3,14) d'après les calculs de Liu Hui et de 355/113 (dont le développement décimal contient les six premiers chiffres de π) d'après ceux de Zu Xuan, fils du mathématicien Zu Chongzhi (429-500), qui utilise la même technique de calcul. En s'engageant dans de tels calculs, Liu Hui met le doigt sur un processus infini, ou plutôt indéfini (dont les limites ne sont pas connues à l'avance).

Nombres immenses et nombres infimes

Pour calculer l'aire du cercle, les démarches chinoise (celle de Liu Hui) et grecque (celle d'Archimède, voir *Les mathématiques, science de l'infini*, par Javier de Lorenzo Martínez, page 29) sont toutes les deux fondées sur des polygones dont le nombre de côtés double sans cesse, mais leur esprit s'oppose : Archimède s'appuie sur des pos-

tulats, des axiomes, des théorèmes et un raisonnement par l'absurde, tandis que Liu Hui se fonde exclusivement sur des calculs algorithmiques, justifiés de façon intuitive et visuelle.

Pour calculer des volumes, l'opposition est moins flagrante. Liu Hui établit le volume de la pyramide en la disséquant en une infinité d'éléments géométriques de plus en plus petits (voir la figure 3), à la manière d'Euclide dans le cinquième théorème du livre XII des *Éléments*, sans que sa technique dépende de calculs réitérés à précision variable, comme dans le cas de l'extraction de la racine carrée et du calcul de π . De même, dans le cas de la sphère, Liu Hui parvient au résultat un peu comme Archimède dans la *Méthode à Ératosthène*, en s'appuyant sur un cas particulier du principe de Cavalieri : pour déduire les volumes à partir des surfaces, la version chinoise de ce principe affirme que, si deux volumes de même hauteur sont tels que le rapport des surfaces de leurs sections reste constant, quel que soit le niveau auquel on effectue la coupe, alors ils sont égaux. Le volume est envisagé comme l'accumulation d'une infinité de tranches infiniment minces, ce qui rappelle le paradoxe de Hui Shi sur l'impossibilité d'accumuler ce qui est dépourvu de dimension.