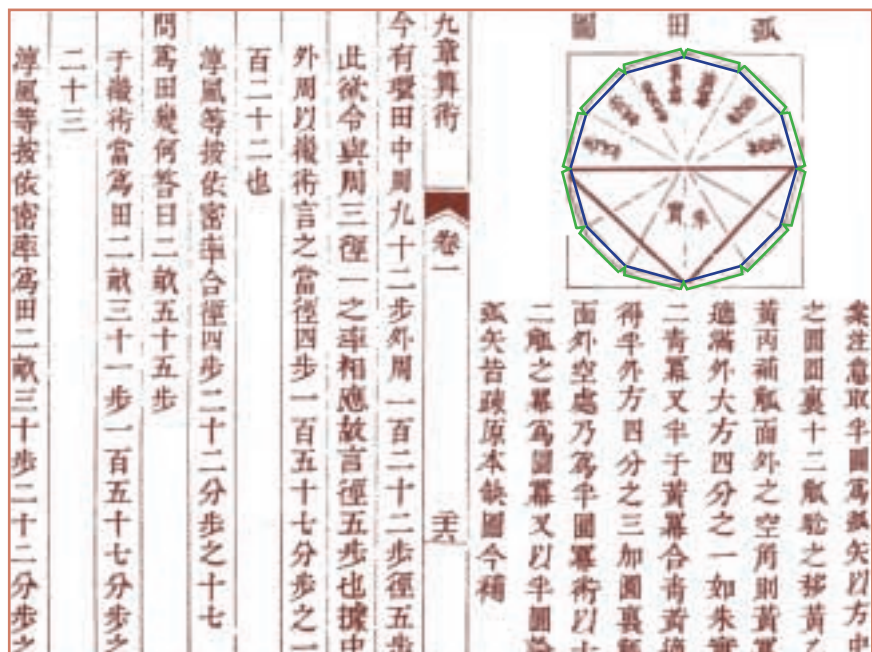


mais finit pourtant par atteindre un millier de li [le li est une unité de mesure chinoise].» Toutefois, il n'explique pas ce paradoxe. Les sinologues ont envisagé plusieurs contextes auxquels il pourrait se rapporter : un débat d'atomistes et de non-atomistes sur l'infinie divisibilité des objets du monde matériel, un débat de géomètres sur la dimension du point ou l'épaisseur du plan, une démonstration des limites du langage au moyen de phrases absurdes. Hui Shi entreprend peut-être une sorte de « déconstruction » du langage en juxtaposant des assertions dépourvues de sens, sans rapport les unes avec les autres. Ses phrases à propos de l'infini, rassemblées par Zhuangzi, le maître chinois de l'irrationnel, appuient cette dernière hypothèse : certaines sont effectivement absurdes et, de surcroît, sans rapport ni avec l'infini ni avec l'atomisme (par exemple, « la tortue est plus longue que le serpent » ou encore « un chien blanc est noir »).

À la fin du III^e siècle, l'infini apparaît pour la première fois en Chine, dans sa dimension mathématique, dans un texte de Liu Hui, qui commente les *Neuf Chapitres de procédés calculatoires*. Ce dernier ouvrage contient la synthèse des connaissances mathématiques jusqu'à l'époque des Han antérieurs (de 220 à 206 avant notre ère), la dynastie sous laquelle ils auraient été compilés pour la première fois.

Le mathématicien Liu Hui remarque que la racine carrée de certains nombres ne peut pas se calculer exactement et explique que l'opération se poursuit parfois indéfiniment. Il calcule cette racine chiffre par chiffre et parle des décimales du résultat en ces termes : « Les petits chiffres qui n'ont pas de nom [qui ne sont pas associés à un nom d'unité de mesure] correspondent à des numérateurs de fractions dont les dénominateurs valent successivement 10, 100, 1 000... » Ainsi, il aborde la notion d'infini par l'intermédiaire du calcul et du développement décimal illimité, qu'il a intuitivement découvert.

Liu Hui s'intéresse aussi à des processus algorithmiques susceptibles de se prolonger sans que l'on sache par avance s'ils vont s'arrêter. Sa méthode de calcul de l'aire du cercle et de la valeur de π en est un exemple. Elle consiste à encadrer le cercle entre deux suites illimitées de polygones et de roues dentées à $2n$ côtés, à partir de $n = 3$ (voir la figure 2). Liu Hui affirme qu'à la longue « le polygone se confond



2. L'AIRES DU CERCLE. Au III^e siècle, le mathématicien chinois Liu Hui, dans son commentaire des *Neufs Chapitres de procédés calculatoires* (reproduit ci-dessus), calcule l'aire du cercle en l'encadrant entre deux séries indéfinies de polygones réguliers inscrits (tel le polygone en bleu) et de « roues dentées » (telle la roue en vert). Si P_n = aire du polygone régulier inscrit à n côtés et R_n = aire de la roue dentée à n côtés, alors $P_n < \text{aire du cercle} < R_n = P_n + 2(P_{2n} - P_n)$. Quand n devient assez grand, étant donné les approximations que fait Liu Hui, R_n devient numériquement égal à P_n .

avec le cercle», sans préciser davantage sa pensée. Il veut probablement dire qu'en menant les calculs assez loin il obtient une valeur numérique de l'aire du polygone égale à celle de la roue dentée correspondante. Selon le nombre de chiffres avec lesquels les opérations intermédiaires sont effectuées, la valeur de π obtenue est plus ou moins précise : elle est de 157/50 (3,14) d'après les calculs de Liu Hui et de 355/113 (dont le développement décimal contient les six premiers chiffres de π) d'après ceux de Zu Xuan, fils du mathématicien Zu Chongzhi (429-500), qui utilise la même technique de calcul. En s'engageant dans de tels calculs, Liu Hui met le doigt sur un processus infini, ou plutôt indéfini (dont les limites ne sont pas connues à l'avance).

Nombres immenses et nombres infimes

Pour calculer l'aire du cercle, les démarches chinoise (celle de Liu Hui) et grecque (celle d'Archimède, voir *Les mathématiques, science de l'infini*, par Javier de Lorenzo Martínez, page 29) sont toutes les deux fondées sur des polygones dont le nombre de côtés double sans cesse, mais leur esprit s'oppose : Archimède s'appuie sur des pos-

tulats, des axiomes, des théorèmes et un raisonnement par l'absurde, tandis que Liu Hui se fonde exclusivement sur des calculs algorithmiques, justifiés de façon intuitive et visuelle.

Pour calculer des volumes, l'opposition est moins flagrante. Liu Hui établit le volume de la pyramide en la disséquant en une infinité d'éléments géométriques de plus en plus petits (voir la figure 3), à la manière d'Euclide dans le cinquième théorème du livre XII des *Éléments*, sans que sa technique dépende de calculs réitérés à précision variable, comme dans le cas de l'extraction de la racine carrée et du calcul de π . De même, dans le cas de la sphère, Liu Hui parvient au résultat un peu comme Archimède dans la *Méthode à Ératosthène*, en s'appuyant sur un cas particulier du principe de Cavalieri : pour déduire les volumes à partir des surfaces, la version chinoise de ce principe affirme que, si deux volumes de même hauteur sont tels que le rapport des surfaces de leurs sections reste constant, quel que soit le niveau auquel on effectue la coupe, alors ils sont égaux. Le volume est envisagé comme l'accumulation d'une infinité de tranches infiniment minces, ce qui rappelle le paradoxe de Hui Shi sur l'impossibilité d'accumuler ce qui est dépourvu de dimension.

Pour appréhender les nombres indéfiniment grands ou indéfiniment petits, les Chinois inventent des séries de termes inspirés des textes sanscrits indiens. Analogues à nos millions, milliards et billions, ces séries servent à nommer des puissances de dix de plus en plus grandes, mais elles se prolongent beaucoup plus loin. Les plus courantes commencent par 11 termes qui n'ont pas de signification particulière, mais se prolongent par *henghesha*, *buke-siyi*, *wuliangshu*, des expressions imagées qui signifient respectivement le «nombre de grains de sable du Gange», l'«impensable» et le «non-mesurable». Ces termes sont investis d'une connotation théologique éloignée des courants de pensée majoritaires dans le monde chinois (surtout du confucianisme), davantage préoccupés par des problèmes d'organisation politique de la société que de métaphysique.

Selon la façon d'attribuer une valeur à un terme donné de la série en fonction du terme précédent, les Chinois obtiennent trois séries dites «du degré inférieur», «du degré moyen» et «du degré supérieur» (les termes supérieurs à la myriade valent respectivement dix fois le terme précédent, 10^4 fois ce terme ou son carré).

Les Chinois ont aussi considéré des puissances de dix décroissantes jusqu'à *chana*, un mot d'origine sanscrite qui signifie «un instant», c'est-à-dire la plus petite unité de temps envisageable.

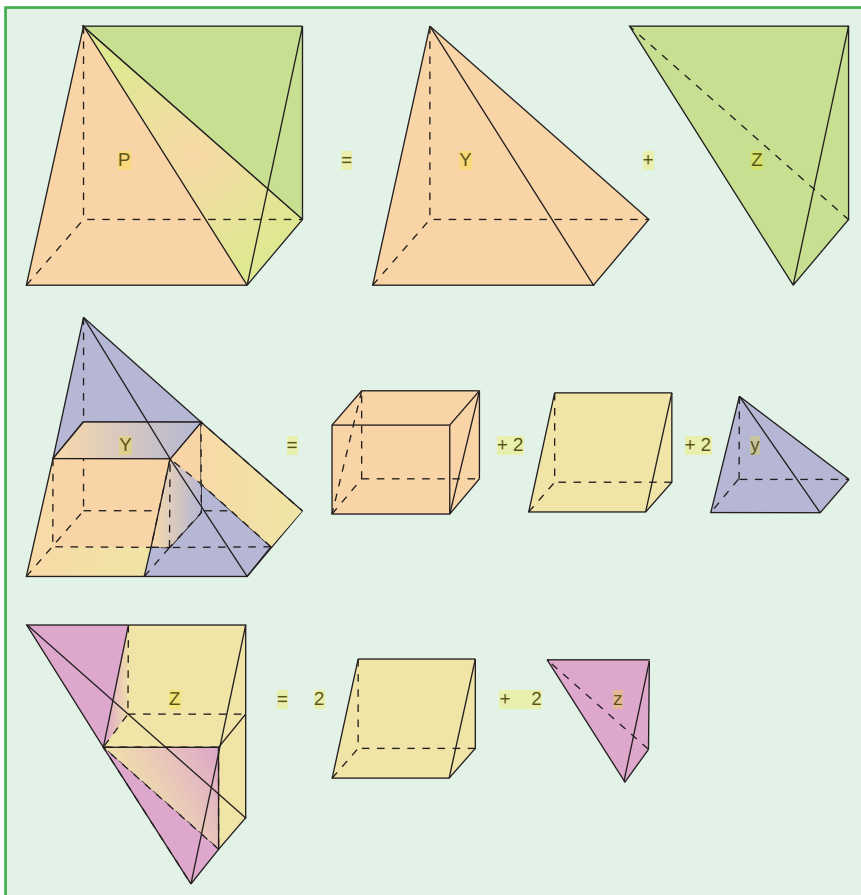
L'intérêt de ces représentations est purement théorique et spéculatif : aucune situation pratique ne nécessite de recourir à des nombres d'une taille aussi inhabituelle. Aussi l'on ne s'étonnera pas de constater que la représentation d'un nombre à l'aide des séries précédentes n'est pas immédiate, dès lors que la règle qui régit la succession

des puissances les unes à partir des autres est plus complexe qu'une simple multiplication par dix : cela n'a pas d'importance si l'on ne fait que réfléchir abstraitement sur l'existence de très grands ou très petits nombres. En revanche, les écrire explicitement est difficile. Dans un recueil de notes, le polygraphe Shen Gua (1031-1095) essaie d'exprimer par écrit la solution du problème combinatoire suivant : quel est le nombre de configurations possibles d'un échiquier de *weiqi*? Ce jeu, plus connu sous son nom japonais, le *go*, se joue sur les intersections d'un damier de 361 cases, chaque intersection pouvant recevoir soit un pion noir, soit un pion blanc, soit rien. Shen Gua ne parvient pas à effectuer complètement les calculs et à trouver la réponse exacte, soit $3^{(19 \times 19)} = 174\,089 \dots 7\,603$, qui se compose de 173 chiffres. En revanche, il imagine à cette occasion un système de représentation approchée des grands nombres, fondé sur la multiplication répétée du nombre 10 000 par lui-même.

Le problème de Shen Gua en rappelle un autre, célèbre en Europe depuis le Moyen Âge, où l'on cherche à déterminer le nombre total de grains de blé posés sur les cases d'un échiquier, le nombre de grains posés sur chaque case doublant à chaque nouvelle case remplie. La solution est égale à $2^{64} - 1$, un nombre très grand, mais encore petit comparé à celui de Shen Gua. Dans ces problèmes, c'est encore le calcul qui conduit à envisager l'infiniment grand et l'infiniment petit, plutôt que la métaphysique.

Les cycles astronomiques et la Grande Origine

Sous la dynastie des Han postérieurs (de 25 à 220), l'astronome Qi Meng est le premier à postuler que l'Univers est illimité dans le temps et dans l'espace. Pourtant, on ne trouve aucune réflexion substantielle sur l'infini dans la littérature scientifique ou philosophique chinoise postérieure aux Han. Au contraire, les Chinois semblent indifférents à la cosmologie. Pourtant, ils s'intéressent à l'astronomie pour déterminer la date de la conjonction du Soleil, de la Lune et des cinq planètes (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne). Cette conjonction bénéfique, en vertu des principes de l'astrologie chinoise, servait d'origine au décompte du temps dans le calendrier chinois. On la



3. LE VOLUME DE LA PYRAMIDE. Pour faire apparaître la pyramide Y, Liu Hui décompose le prisme P de sorte que $P = Y + Z$. Comme il connaît le volume du prisme $V_p = 1/2 \text{ largeur} \times \text{longueur} \times \text{hauteur}$, il lui suffit de montrer que $Y = 2Z$ pour prouver que le volume de la pyramide Y vaut $1/3 V_p$. Pour y parvenir, il dissèque Y et Z. Il constate ainsi que les divers éléments de la dissection sont dans la proportion du simple au double, mais avec un petit «reliquat», y et z, dont les éléments sont semblables à Y et Z, avec des dimensions divisées par deux, et pour lequel il faut vérifier à nouveau $y = 2z$. Pour y parvenir, il réitère la même décomposition indéfiniment, de façon à obtenir à chaque fois des reliquats de plus en plus petits. À la limite, $Y = 2Z$. La technique est intuitive, mais elle peut être présentée sous forme rigoureuse.