

Pour appréhender les nombres indéfiniment grands ou indéfiniment petits, les Chinois inventent des séries de termes inspirés des textes sanscrits indiens. Analogues à nos millions, milliards et billions, ces séries servent à nommer des puissances de dix de plus en plus grandes, mais elles se prolongent beaucoup plus loin. Les plus courantes commencent par 11 termes qui n'ont pas de signification particulière, mais se prolongent par *henghesha*, *buke-siyi*, *wuliangshu*, des expressions imagées qui signifient respectivement le «nombre de grains de sable du Gange», l'«impensable» et le «non-mesurable». Ces termes sont investis d'une connotation théologique éloignée des courants de pensée majoritaires dans le monde chinois (surtout du confucianisme), davantage préoccupés par des problèmes d'organisation politique de la société que de métaphysique.

Selon la façon d'attribuer une valeur à un terme donné de la série en fonction du terme précédent, les Chinois obtiennent trois séries dites «du degré inférieur», «du degré moyen» et «du degré supérieur» (les termes supérieurs à la myriade valent respectivement dix fois le terme précédent, 10^4 fois ce terme ou son carré).

Les Chinois ont aussi considéré des puissances de dix décroissantes jusqu'à *chana*, un mot d'origine sanscrite qui signifie «un instant», c'est-à-dire la plus petite unité de temps envisageable.

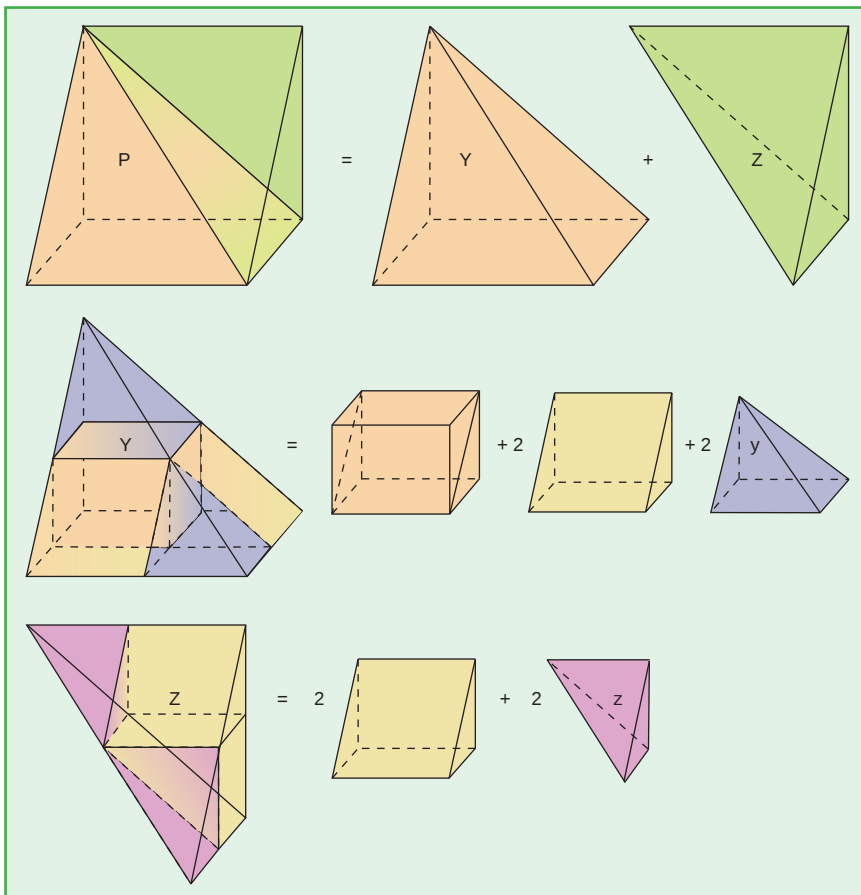
L'intérêt de ces représentations est purement théorique et spéculatif : aucune situation pratique ne nécessite de recourir à des nombres d'une taille aussi inhabituelle. Aussi l'on ne s'étonnera pas de constater que la représentation d'un nombre à l'aide des séries précédentes n'est pas immédiate, dès lors que la règle qui régit la succession

des puissances les unes à partir des autres est plus complexe qu'une simple multiplication par dix : cela n'a pas d'importance si l'on ne fait que réfléchir abstraitement sur l'existence de très grands ou très petits nombres. En revanche, les écrire explicitement est difficile. Dans un recueil de notes, le polygraphe Shen Gua (1031-1095) essaie d'exprimer par écrit la solution du problème combinatoire suivant : quel est le nombre de configurations possibles d'un échiquier de *weiqi*? Ce jeu, plus connu sous son nom japonais, le *go*, se joue sur les intersections d'un damier de 361 cases, chaque intersection pouvant recevoir soit un pion noir, soit un pion blanc, soit rien. Shen Gua ne parvient pas à effectuer complètement les calculs et à trouver la réponse exacte, soit $3^{(19 \times 19)} = 174\,089 \dots 7\,603$, qui se compose de 173 chiffres. En revanche, il imagine à cette occasion un système de représentation approchée des grands nombres, fondé sur la multiplication répétée du nombre 10 000 par lui-même.

Le problème de Shen Gua en rappelle un autre, célèbre en Europe depuis le Moyen Âge, où l'on cherche à déterminer le nombre total de grains de blé posés sur les cases d'un échiquier, le nombre de grains posés sur chaque case doublant à chaque nouvelle case remplie. La solution est égale à $2^{64} - 1$, un nombre très grand, mais encore petit comparé à celui de Shen Gua. Dans ces problèmes, c'est encore le calcul qui conduit à envisager l'infiniment grand et l'infiniment petit, plutôt que la métaphysique.

Les cycles astronomiques et la Grande Origine

Sous la dynastie des Han postérieurs (de 25 à 220), l'astronome Qi Meng est le premier à postuler que l'Univers est illimité dans le temps et dans l'espace. Pourtant, on ne trouve aucune réflexion substantielle sur l'infini dans la littérature scientifique ou philosophique chinoise postérieure aux Han. Au contraire, les Chinois semblent indifférents à la cosmologie. Pourtant, ils s'intéressent à l'astronomie pour déterminer la date de la conjonction du Soleil, de la Lune et des cinq planètes (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne). Cette conjonction bénéfique, en vertu des principes de l'astrologie chinoise, servait d'origine au décompte du temps dans le calendrier chinois. On la



3. LE VOLUME DE LA PYRAMIDE. Pour faire apparaître la pyramide Y, Liu Hui décompose le prisme P de sorte que $P = Y + Z$. Comme il connaît le volume du prisme $V_p = 1/2 \text{ largeur} \times \text{longueur} \times \text{hauteur}$, il lui suffit de montrer que $Y = 2Z$ pour prouver que le volume de la pyramide Y vaut $1/3 V_p$. Pour y parvenir, il dissèque Y et Z. Il constate ainsi que les divers éléments de la dissection sont dans la proportion du simple au double, mais avec un petit «reliquat», y et z, dont les éléments sont semblables à Y et Z, avec des dimensions divisées par deux, et pour lequel il faut vérifier à nouveau $y = 2z$. Pour y parvenir, il réitère la même décomposition indéfiniment, de façon à obtenir à chaque fois des reliquats de plus en plus petits. À la limite, $Y = 2Z$. La technique est intuitive, mais elle peut être présentée sous forme rigoureuse.

nomme la «Grande Origine». Elle était censée survenir à minuit, le jour du solstice d'hiver. À partir de cette date, les jours et les années étaient numérotés à l'aide du cycle de 60 (un nouveau cycle commence tous les 60 jours ou tous les 60 ans). Puis les Chinois ont voulu que la Grande Origine coïncide aussi avec le début du mois anomalistique (l'intervalle de temps qui sépare deux passages de la Lune à son périégée) et draconitique (l'intervalle de temps qui sépare deux passages de la Lune à son nœud ascendant, l'une des intersections de l'orbite lunaire avec l'écliptique terrestre). Dans le cas le plus complet, les Chinois ont calculé la date de la Grande Origine comme étant le point de départ de 11 cycles (cinq pour les planètes, un pour le Soleil, trois pour la Lune et deux pour le calendrier).

Ces préoccupations ont à nouveau fourni aux Chinois des raisons de s'intéresser aux très grands nombres : pour déterminer la date de la Grande Origine, ils ont calculé le plus petit multiple commun de certains ou de la totalité des cycles précédents. Les périodes correspondantes étant mutuellement incommensurables, ils ont reculé la Grande Origine de plus en plus loin dans le passé, il y a des milliers, puis des millions et enfin des centaines de millions d'années, dans le cas le plus complet. Avec la réforme de l'astronomie chinoise, promulguée en 1281, l'idée des cycles a été abandonnée et, dès lors, l'astronomie chinoise a cessé de taquiner les très grands nombres.

En dehors des exemples précédents, les quelques autres infinis de la culture chinoise ont presque tous émergé de processus calculatoires. Le plus frappant d'entre eux concerne les séries infinies de fonctions trigonométriques, introduites en Chine par les ouvrages mathématiques européens que les missionnaires jésuites ont apporté aux XVII^e et XVIII^e siècles. Les mathématiciens chinois du XVIII^e et du XIX^e siècle ont abordé le sujet à partir de calculs algébriques, sans lésiner sur la taille des nombres, qui atteignait parfois plus de 50 chiffres.

Si les sophistes et les logiciens de l'Antiquité avaient bénéficié d'une plus grande audience, si leurs théories n'avaient pas été associées aux charmes supposés fallacieux de la rhétorique, la notion d'infini en Chine s'en serait trouvée modifiée. L'importance croissante au cours du temps du confucianisme



4. LES MILLE BOUDDHAS de l'une des grottes du site de Dunhuang (au Nord-Ouest de la Chine) illustrent l'idée d'un monde infini, véhiculée par le bouddhisme en Chine à partir du premier millénaire de notre ère. Cette infinitude est symboliquement représentée par les très grands nombres (ici, par les mille bouddhas).

dans le monde chinois, surtout à partir du XI^e siècle, a probablement joué un rôle majeur à cet égard : dans ses *Entretiens familiers*, Confucius explique qu'il serait vain de s'intéresser aux dieux, aux esprits et plus généralement à la métaphysique et à tout ce qui paraît fonciè-

rement inconnaissable. Bien que la réflexion chinoise ne manque pas d'envolées spéculatives, ceux qui s'y sont essayés n'ont guère été suivis, et la question de l'infini n'a jamais retenu très longtemps l'attention des penseurs chinois, sauf des bouddhistes.

Jean-Claude MARTZLOFF est sinologue au Centre de recherche en civilisation chinoise du CNRS, à Paris.

Jacques GERNET, *Le monde chinois*, Armand Colin, Paris, 1999.

Jean-Claude MARTZLOFF, *A History of Chinese Mathematics*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

Jean-Claude MARTZLOFF, *Chinese Mathematical Astronomy*, in *Mathematics Across Cultures, The History of Non-Western Mathematics*, sous la direction d'He-

laine Selin, pp. 373-407, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

Joël BRENIER, *Notation et optimisation du calcul des grands nombres en Chine*, in *Nombres, astres, plantes et viscères*, sous la direction d'Isabelle Ang et Pierre-Étienne Will, Collège de France, Institut des hautes études chinoises, pp. 89-111, Paris 1994.

Kiyosi YABUUTI, *Une histoire des mathématiques chinoises*, Belin-Pour La Science, 2000.

Thābit ibn Qurra et l'infini numérique

TONY LÉVY

Face aux thèses d'Aristote, longtemps dominantes en philosophie, un savant arabe du IX^e siècle eut sur l'infini un point de vue aussi original qu'audacieux.



Jusqu'à la Renaissance, la conception d'Aristote a dominé tous les débats concernant l'infini. Commentée, précisée, expliquée, amendée par les uns, elle fut, plus rarement, récusée par d'autres. Sa portée est tout à la fois physique, cosmologique, mathématique, philosophique et théologique. Cet aspect de l'histoire de la notion d'infini est primordial : c'est dans l'unité de ces divers registres du savoir, dans les tensions qui les relient ou les opposent, que l'on saisit la dynamique du questionnement sur l'infini. Il nous faut donc retracer les grandes lignes de la théorie aristotélienne de l'infini et indiquer la nature des premières oppositions qu'elle a suscitées : on mesurera ainsi la nouveauté et la hardiesse du point de vue développé sur cette question par Thābit ibn Qurra, de Ḥarrān (836-901).

L'infini est inachèvement

La pensée d'Aristote s'enracine dans un questionnement sur la structure du monde. La science de la nature – la «physique» pour Aristote – et l'analyse du mouvement qui en est le socle conduisent à affronter la question de l'infini : l'infini existe-t-il ? Si oui, en quel sens ? Le mouvement, une grandeur physique (une longueur, par exemple) ou le temps sont autant de notions soumises à l'alternative : être limité ou échapper à la limite. Puisque «la nature est principe de mouvement»,

que le mouvement relève du continu et que la divisibilité du continu est «sans terme» (c'est-à-dire sans fin), la question de l'infini est posée. Retenons ce point essentiel, qui oppose Aristote aux écoles de pensée atomistes : la division d'une grandeur physique est sans terme ; il faut donc rendre compte de cette propriété qui caractérise la divisibilité d'une grandeur telle qu'une ligne, une surface ou un solide.

Dans une première description, qui n'est pas encore une définition, on dira avec Aristote : «est infini (*apeiron*)» ce qu'on peut «par nature parcourir, mais qui ne se laisse pas parcourir et n'a pas de fin (*peras*)». L'idée de «parcours», de «traversée», et la métaphore spatiale qu'elle charrie, nous pousse à camper l'analyse sur le territoire du quantifiable. C'est bien dans la catégorie de la quantité, du «combien», qu'Aristote entend inscrire sa définition de l'infini. Qui dit quantité dit grandeur ou nombre et, pour mesurer ou compter, il faut pouvoir distinguer le tout de ses parties, et poser ainsi, d'emblée, que le tout en question est «partageable», c'est-à-dire «divisible». L'infini concerne trois notions. La grandeur, qui est «divisible à l'infini» ; le nombre, qui est «composable à l'infini» (aussi grand que soit un nombre, il en est un qui est plus grand) ; le temps, qui est «composable et divisible».

La première conclusion d'Aristote est négative : l'infini n'existe pas comme totalité, comme «être actuel»,

comme forme achevée. Cette impossibilité vaut aussi bien pour une totalité corporelle que pour une totalité incorporelle, substance ou principe. En particulier, le monde en tant que grandeur physique est fini, clos par la «dernière» des sphères célestes.

Toutefois, pour Aristote, l'infini existe selon un autre mode : en puissance. Il s'agit d'un mode d'existence inférieur, subordonné à l'être actuel, mais qui n'en est pas moins réel. L'infini en puissance, qui est possibilité, virtualité, s'exprime dans cette propriété de la grandeur continue : aussi loin que je la divise, je peux encore poursuivre la division. Aristote écrit ainsi dans sa *Physique* : «Mais l'infini se trouve être le contraire de ce que l'on dit. En effet, il n'est pas ce qui n'a rien à l'extérieur de soi, mais c'est ce dont quelque chose est toujours à l'extérieur de lui : c'est cela, l'infini [...]. Est donc infini ce dont, quand on le prend selon la quantité, il est toujours possible de prendre quelque chose à l'extérieur.»

L'infini n'est qu'«en puissance»

Cette divisibilité sans terme du continu se double d'une autre propriété. On peut la formuler ainsi : divisez un segment de droite en deux, puis un des deux sous-segments ainsi obtenus (dont la longueur vaut alors la moitié de celle du segment initial) à son tour en deux, et ainsi de suite ; cette division ou dicho-