

Thābit ibn Qurra et l'infini numérique

TONY LÉVY

Face aux thèses d'Aristote, longtemps dominantes en philosophie, un savant arabe du IX^e siècle eut sur l'infini un point de vue aussi original qu'audacieux.



Jusqu'à la Renaissance, la conception d'Aristote a dominé tous les débats concernant l'infini. Commentée, précisée, expliquée, amendée par les uns, elle fut, plus rarement, récusée par d'autres. Sa portée est tout à la fois physique, cosmologique, mathématique, philosophique et théologique. Cet aspect de l'histoire de la notion d'infini est primordial : c'est dans l'unité de ces divers registres du savoir, dans les tensions qui les relient ou les opposent, que l'on saisit la dynamique du questionnement sur l'infini. Il nous faut donc retracer les grandes lignes de la théorie aristotélienne de l'infini et indiquer la nature des premières oppositions qu'elle a suscitées : on mesurera ainsi la nouveauté et la hardiesse du point de vue développé sur cette question par Thābit ibn Qurra, de Ḥarrān (836-901).

L'infini est inachèvement

La pensée d'Aristote s'enracine dans un questionnement sur la structure du monde. La science de la nature – la «physique» pour Aristote – et l'analyse du mouvement qui en est le socle conduisent à affronter la question de l'infini : l'infini existe-t-il ? Si oui, en quel sens ? Le mouvement, une grandeur physique (une longueur, par exemple) ou le temps sont autant de notions soumises à l'alternative : être limité ou échapper à la limite. Puisque «la nature est principe de mouvement»,

que le mouvement relève du continu et que la divisibilité du continu est «sans terme» (c'est-à-dire sans fin), la question de l'infini est posée. Retenons ce point essentiel, qui oppose Aristote aux écoles de pensée atomistes : la division d'une grandeur physique est sans terme ; il faut donc rendre compte de cette propriété qui caractérise la divisibilité d'une grandeur telle qu'une ligne, une surface ou un solide.

Dans une première description, qui n'est pas encore une définition, on dira avec Aristote : «est infini (*apeiron*)» ce qu'on peut «par nature parcourir, mais qui ne se laisse pas parcourir et n'a pas de fin (*peras*)». L'idée de «parcours», de «traversée», et la métaphore spatiale qu'elle charrie, nous pousse à camper l'analyse sur le territoire du quantifiable. C'est bien dans la catégorie de la quantité, du «combien», qu'Aristote entend inscrire sa définition de l'infini. Qui dit quantité dit grandeur ou nombre et, pour mesurer ou compter, il faut pouvoir distinguer le tout de ses parties, et poser ainsi, d'emblée, que le tout en question est «partageable», c'est-à-dire «divisible». L'infini concerne trois notions. La grandeur, qui est «divisible à l'infini» ; le nombre, qui est «composable à l'infini» (aussi grand que soit un nombre, il en est un qui est plus grand) ; le temps, qui est «composable et divisible».

La première conclusion d'Aristote est négative : l'infini n'existe pas comme totalité, comme «être actuel»,

comme forme achevée. Cette impossibilité vaut aussi bien pour une totalité corporelle que pour une totalité incorporelle, substance ou principe. En particulier, le monde en tant que grandeur physique est fini, clos par la «dernière» des sphères célestes.

Toutefois, pour Aristote, l'infini existe selon un autre mode : en puissance. Il s'agit d'un mode d'existence inférieur, subordonné à l'être actuel, mais qui n'en est pas moins réel. L'infini en puissance, qui est possibilité, virtualité, s'exprime dans cette propriété de la grandeur continue : aussi loin que je la divise, je peux encore poursuivre la division. Aristote écrit ainsi dans sa *Physique* : «Mais l'infini se trouve être le contraire de ce que l'on dit. En effet, il n'est pas ce qui n'a rien à l'extérieur de soi, mais c'est ce dont quelque chose est toujours à l'extérieur de lui : c'est cela, l'infini [...]. Est donc infini ce dont, quand on le prend selon la quantité, il est toujours possible de prendre quelque chose à l'extérieur.»

L'infini n'est qu'«en puissance»

Cette divisibilité sans terme du continu se double d'une autre propriété. On peut la formuler ainsi : divisez un segment de droite en deux, puis un des deux sous-segments ainsi obtenus (dont la longueur vaut alors la moitié de celle du segment initial) à son tour en deux, et ainsi de suite ; cette division ou dicho-

tomie n'a pas de terme, comme on l'a dit. Si, de plus, vous réunissez les sous-segments successivement produits par cette dichotomie, vous vous «rapprochez» du segment initial ; et plus le nombre des sous-segments est grand, plus vous vous rapprochez du segment fini initial. En s'écartant quelque peu de la lettre du texte d'Aristote, mais non de son esprit, on pourrait dire que l'infini ainsi conçu est un détour nous permettant de retrouver le fini (le segment initial), sans jamais toutefois épuiser le fini. Cela fait bien sûr songer à ce que nous nommons, aujourd'hui, la «convergence» d'une série géométrique : plus l'entier n est choisi grand dans la somme $S_n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n$, plus le résultat se rapproche de 1 ; on dit que la somme S_n converge vers 1, ou que la limite de S_n est 1. On se gardera toutefois d'attribuer à Aristote l'idée moderne de «limite», qui n'a rien à voir avec son propos.

S'agissant du nombre, il sera dit «augmentable à l'infini en puissance». Il suffit de penser au nombre de sous-segments produits par la division répétée d'un segment de droite : quel que soit le nombre (de sous-segments) considéré, on peut encore l'augmenter. Et de même que la division du segment ne s'achève jamais, il ne saurait y avoir un nombre ultime, un nombre «infini actuel».

Le troisième volet de l'analyse aristotélicienne concerne le temps, défini par le mouvement, et par ce biais, associé à la grandeur. Pour Aristote, le temps est à la fois divisible et augmentable. Le mouvement des sphères célestes est «sans commencement et sans fin», ce qui l'amène à faire apparaître l'infini «dans le temps et la génération des hommes». Ce thème, communément désigné comme celui de l'«éternité du monde» (le monde a toujours été là!), suscitera de nombreuses objections, surtout chez les partisans des religions révélées, soucieux de fonder philosophiquement l'idée de la création du monde par un acte divin. Soulignons que les premiers débats suscités par la théorie d'Aristote eurent un point de départ théologique.

Jean Philopon, un penseur chrétien d'Alexandrie (VI^e siècle), est à l'origine de plusieurs arguments dirigés contre l'idée de l'éternité du monde. Ces arguments, qui utilisent les définitions mêmes d'Aristote relatives à l'infini, visaient à ruiner les conclusions de ce dernier concernant l'infinité du temps,

pour en arriver à justifier l'idée d'un monde créé par la volonté souveraine de Dieu. Ce faisant, Jean Philopon mettait à l'épreuve la théorie aristotélicienne de l'infini, suscitant ainsi chez les partisans d'Aristote, surtout au Moyen Âge, amendements et développements nouveaux.

L'infini aristotélicien confronté à ses paradoxes

La principale critique de Philopon, au demeurant pertinente, exploitait le paradoxe suivant : l'éternité temporelle affirmée par Aristote ne réintroduit-elle pas par la fenêtre l'infini actuel qu'il prétend chasser par la porte ? À cette occasion, Philopon recourait fréquemment à l'un des arguments développés par Aristote pour récuser la possibilité d'un infini actuel. Précisons pourquoi il revêt

une portée considérable pour l'histoire qui nous concerne ici.

Supposons, le temps de la réflexion, qu'existe réellement une substance (voire un principe, comme le pensaient par exemple les pythagoriciens) dont la seule essence est d'être un infini. Pour Aristote, la définition d'un être en épuise la réalité ; autrement dit, la définition et la réalité d'une telle substance sont une seule et même chose. Si l'infini est une substance divisible, comment définir ses parties ? On répondra : de même que toute partie d'une substance comme l'air ne peut être définie que comme air, de même une partie de l'infini-substance ne peut être définie, à son tour, que comme de l'infini. Il en résulte que l'infini serait divisible en infinis. Arrivé à ce stade, Aristote conclut laconiquement : «Mais il est impossible que la même chose soit plusieurs infinis.»



1. DES SAGES AU TRAVAIL. Cette miniature arabe, qui date du XIII^e siècle, est l'œuvre du miniaturiste Al-Wasiti et fait partie des illustrations d'un classique de la littérature islamique, *Les séances d'Al-Hariri*.