

tomie n'a pas de terme, comme on l'a dit. Si, de plus, vous réunissez les sous-segments successivement produits par cette dichotomie, vous vous «rapprochez» du segment initial ; et plus le nombre des sous-segments est grand, plus vous vous rapprochez du segment fini initial. En s'écartant quelque peu de la lettre du texte d'Aristote, mais non de son esprit, on pourrait dire que l'infini ainsi conçu est un détour nous permettant de retrouver le fini (le segment initial), sans jamais toutefois épuiser le fini. Cela fait bien sûr songer à ce que nous nommons, aujourd'hui, la «convergence» d'une série géométrique : plus l'entier n est choisi grand dans la somme $S_n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n$, plus le résultat se rapproche de 1 ; on dit que la somme S_n converge vers 1, ou que la limite de S_n est 1. On se gardera toutefois d'attribuer à Aristote l'idée moderne de «limite», qui n'a rien à voir avec son propos.

S'agissant du nombre, il sera dit «augmentable à l'infini en puissance». Il suffit de penser au nombre de sous-segments produits par la division répétée d'un segment de droite : quel que soit le nombre (de sous-segments) considéré, on peut encore l'augmenter. Et de même que la division du segment ne s'achève jamais, il ne saurait y avoir un nombre ultime, un nombre «infini actuel».

Le troisième volet de l'analyse aristotélicienne concerne le temps, défini par le mouvement, et par ce biais, associé à la grandeur. Pour Aristote, le temps est à la fois divisible et augmentable. Le mouvement des sphères célestes est «sans commencement et sans fin», ce qui l'amène à faire apparaître l'infini «dans le temps et la génération des hommes». Ce thème, communément désigné comme celui de l'«éternité du monde» (le monde a toujours été là!), suscitera de nombreuses objections, surtout chez les partisans des religions révélées, soucieux de fonder philosophiquement l'idée de la création du monde par un acte divin. Soulignons que les premiers débats suscités par la théorie d'Aristote eurent un point de départ théologique.

Jean Philopon, un penseur chrétien d'Alexandrie (VI^e siècle), est à l'origine de plusieurs arguments dirigés contre l'idée de l'éternité du monde. Ces arguments, qui utilisent les définitions mêmes d'Aristote relatives à l'infini, visaient à ruiner les conclusions de ce dernier concernant l'infinité du temps,

pour en arriver à justifier l'idée d'un monde créé par la volonté souveraine de Dieu. Ce faisant, Jean Philopon mettait à l'épreuve la théorie aristotélicienne de l'infini, suscitant ainsi chez les partisans d'Aristote, surtout au Moyen Âge, amendements et développements nouveaux.

L'infini aristotélicien confronté à ses paradoxes

La principale critique de Philopon, au demeurant pertinente, exploitait le paradoxe suivant : l'éternité temporelle affirmée par Aristote ne réintroduit-elle pas par la fenêtre l'infini actuel qu'il prétend chasser par la porte ? À cette occasion, Philopon recourait fréquemment à l'un des arguments développés par Aristote pour récuser la possibilité d'un infini actuel. Précisons pourquoi il revêt

une portée considérable pour l'histoire qui nous concerne ici.

Supposons, le temps de la réflexion, qu'existe réellement une substance (voire un principe, comme le pensaient par exemple les pythagoriciens) dont la seule essence est d'être un infini. Pour Aristote, la définition d'un être en épuise la réalité ; autrement dit, la définition et la réalité d'une telle substance sont une seule et même chose. Si l'infini est une substance divisible, comment définir ses parties ? On répondra : de même que toute partie d'une substance comme l'air ne peut être définie que comme air, de même une partie de l'infini-substance ne peut être définie, à son tour, que comme de l'infini. Il en résulte que l'infini serait divisible en infinis. Arrivé à ce stade, Aristote conclut laconiquement : «Mais il est impossible que la même chose soit plusieurs infinis.»



1. DES SAGES AU TRAVAIL. Cette miniature arabe, qui date du XIII^e siècle, est l'œuvre du miniaturiste Al-Wasīṭi et fait partie des illustrations d'un classique de la littérature islamique, *Les séances d'Al-Hariri*.

Comment réfuter l'argument «un infini ne peut être plus grand qu'un infini»

«**N**ous l'avons aussi questionné au sujet de la proposition invoquée par nombre de commentateurs respectables, à savoir qu'un infini ne peut être plus grand qu'un infini. Il [Thābit] nous a montré la fausseté de cette proposition, encore une fois sur l'exemple du nombre.

En effet, le nombre en soi est infini, et dans le nombre, les nombres pairs, pris séparément, sont infinis ; et il en est de même pour les nombres impairs ; or ces deux catégories sont égales, et chacune d'elles est la moitié du nombre dans sa totalité. Leur égalité [la catégorie des nombres pairs et celle des impairs] se montre à partir de ce que, de deux nombres successifs, l'un est pair et l'autre est impair. Que le nombre [dans sa totalité] soit le double de chacune d'elles [la catégorie des nombres pairs et celle des impairs], cela vient de ce qu'elles sont égales et qu'elles l'épuisent [le nombre] et qu'il ne contient aucune partie en dehors d'elles. Chacune d'elles est donc bien la moitié du nombre [dans sa totalité].

Il est clair aussi qu'un infini peut être le tiers d'un infini, ou le quart ou le cinquième ou toute autre partie du nombre considéré en lui-même. En effet, les nombres qui ont un tiers [les entiers multiples de 3] sont infinis et ils représentent le tiers du nombre dans sa totalité. Et les nombres qui ont un quart [les entiers multiples de 4] représentent le quart du nombre dans sa totalité ; et les nombres qui ont un cinquième représentent le cinquième du nombre dans sa totalité. Et l'on procède de même pour les autres parties du nombre. Cela vient de ce que nous trouvons dans tout triplet de nombres consécutifs, l'un qui a un tiers [un entier multiple de 3] ; dans tout quadruplet de nombres consécutifs, l'un qui a un quart ; dans tout quintuplet, l'un qui a un cinquième ; et dans toute suite de nombres consécutifs, quel qu'en soit le nombre, on trouve que l'un d'entre eux a une partie désignée d'après le nombrement [dans toute suite de n nombres consécutifs, il y a un nombre qui a une n -ième partie, c'est-à-dire un entier multiple de n]...»

Bien des auteurs ont compris ainsi cet argument d'impossibilité : si un tout est infini, et qu'une partie de ce tout est aussi infinie, alors, le tout étant nécessairement plus grand que sa partie, nous aurions un infini plus grand qu'un infini ; voilà qui est absurde. Rapportée au cadre conceptuel fixé par Aristote, cette «absurdité» signifie que l'infini n'est pas une entité, que c'est un processus d'inachèvement ; à ce titre, il n'y a aucun sens à le traiter comme une quantité, à distinguer différents infinis, à comparer des infinis, bref à le manipuler comme une forme.

Quoi qu'il en soit, tous ceux qui se plaçaient sur le terrain de la théorie aristotélicienne, pour la défendre ou pour en récuser certaines conclusions, ont abondamment invoqué ce type d'argument. Si le monde est sans commencement, écrira ainsi Philopon, alors on doit dire que le nombre des hommes engendrés jusqu'au temps de Socrate est infini ; en y ajoutant le nombre des hommes engendrés depuis Socrate jusqu'à aujourd'hui, on obtiendrait «quelque chose plus grand que l'infini». Autre paradoxe énoncé par Philopon : quand le Soleil accomplit une révolution, la Lune en effectue 12 ; en supposant le monde sans commencement, on doit bien admettre, d'une

manière ou d'une autre, que les révolutions du Soleil sont infiniment nombreuses, et que, par conséquent, les révolutions de la Lune représentent un infini douze fois plus grand qu'un autre infini – autre «absurdité». On devine la conclusion de Philopon, à savoir que le point de départ de ce raisonnement doit être récusé, et que les aristotéliciens eux-mêmes doivent convenir que le monde a bien un commencement.

Les critiques de Philopon rencontrèrent un écho considérable dans les traditions grecque, arabe, hébraïque et latine ; elles donneront naissance à une foule d'arguments dérivés. Par exemple, certains théologiens musulmans opposeront aux philosophes arabes aristotéliciens un argument qui fera fortune dans les débats de la scolastique médiévale. Supposons le monde sans commencement. Alors le nombre des âmes séparées des corps après la mort, et qui survivent éternellement à ces corps, constitue bien un nombre infini, et actuel ; n'est-ce pas là une contradiction dans le raisonnement des philosophes (aristotéliciens), qui devrait les contraindre à reconnaître que la thèse de l'éternité du monde est (philosophiquement) intenable ? Maniant les outils logiques et conceptuels du discours philosophique avec

une efficacité souvent redoutable, ces théologiens concluaient, du reste, à l'impossibilité de toute espèce d'infini, potentiel comme actuel.

On s'en doute, les répliques des philosophes, soucieux de légitimer la cohérence de la pensée d'inspiration aristotélicienne, n'ont pas manqué ; et les arguments déployés à cette occasion ont nourri le débat sur l'infini, qui se prolongera dans les traditions théologiques et philosophiques d'expression latine et hébraïque. La critique du point de vue aristotélicien s'est aussi exercée dans d'autres directions. Beaucoup plus rarement, il est vrai, mais avec au moins autant de rigueur, certains ont adopté un infinitisme de principe, qui les a conduits à remettre en cause l'ensemble du dispositif conceptuel aristotélicien. C'est le cas de Thābit ibn Qurra.

Abū'l-Ḥassan Thābit ibn Qurra al-Ḥarrānī, le Sabéen (mort en 901) est l'un des plus prestigieux représentants de la science arabe du IX^e siècle. Originaire de Ḥarrān, en Anatolie, il fut remarqué pour ses dons exceptionnels par les trois frères Banū Mūsā, savants et mécènes de Bagdad, qui l'intégrèrent aux cercles de savants encouragés et financés par le calife. Traducteur du grec en arabe, d'œuvres d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, de Ptolémée, de Nicomaque de Gérase, Thābit est lui-même l'auteur de traités novateurs, voire fondateurs, dans divers domaines des mathématiques (géométrie infinitésimale, algèbre, arithmétique et théorie des nombres) et de l'astronomie. On lui attribue aussi des écrits médicaux. Il semble avoir supervisé des traductions du syriaque en arabe – la langue syriaque fut un très important relais de la culture grecque avant l'avènement de l'islam ; à Ḥarrān, centre syriaque important, dominait la religion syncrétiste des Sabéens, dont Thābit fut peut-être un dignitaire.

Comment Thābit ibn Qurra envisage l'infini actuel

Le texte de Thābit que nous allons commenter témoigne que ce dernier était, à côté de ses activités proprement scientifiques, pleinement engagé dans les débats philosophiques et théologiques de son temps, à propos desquels il affichait avec autorité un point de vue original. Ce point de vue nous est parvenu sous la forme de réponses aux questions posées par un de ses disciples,