

Comment réfuter l'argument «un infini ne peut être plus grand qu'un infini»

«**N**ous l'avons aussi questionné au sujet de la proposition invoquée par nombre de commentateurs respectables, à savoir qu'un infini ne peut être plus grand qu'un infini. Il [Thābit] nous a montré la fausseté de cette proposition, encore une fois sur l'exemple du nombre.

En effet, le nombre en soi est infini, et dans le nombre, les nombres pairs, pris séparément, sont infinis ; et il en est de même pour les nombres impairs ; or ces deux catégories sont égales, et chacune d'elles est la moitié du nombre dans sa totalité. Leur égalité [la catégorie des nombres pairs et celle des impairs] se montre à partir de ce que, de deux nombres successifs, l'un est pair et l'autre est impair. Que le nombre [dans sa totalité] soit le double de chacune d'elles [la catégorie des nombres pairs et celle des impairs], cela vient de ce qu'elles sont égales et qu'elles l'épuisent [le nombre] et qu'il ne contient aucune partie en dehors d'elles. Chacune d'elles est donc bien la moitié du nombre [dans sa totalité].

Il est clair aussi qu'un infini peut être le tiers d'un infini, ou le quart ou le cinquième ou toute autre partie du nombre considéré en lui-même. En effet, les nombres qui ont un tiers [les entiers multiples de 3] sont infinis et ils représentent le tiers du nombre dans sa totalité. Et les nombres qui ont un quart [les entiers multiples de 4] représentent le quart du nombre dans sa totalité ; et les nombres qui ont un cinquième représentent le cinquième du nombre dans sa totalité. Et l'on procède de même pour les autres parties du nombre. Cela vient de ce que nous trouvons dans tout triplet de nombres consécutifs, l'un qui a un tiers [un entier multiple de 3] ; dans tout quadruplet de nombres consécutifs, l'un qui a un quart ; dans tout quintuplet, l'un qui a un cinquième ; et dans toute suite de nombres consécutifs, quel qu'en soit le nombre, on trouve que l'un d'entre eux a une partie désignée d'après le nombrement [dans toute suite de n nombres consécutifs, il y a un nombre qui a une n -ième partie, c'est-à-dire un entier multiple de n]...»

Bien des auteurs ont compris ainsi cet argument d'impossibilité : si un tout est infini, et qu'une partie de ce tout est aussi infinie, alors, le tout étant nécessairement plus grand que sa partie, nous aurions un infini plus grand qu'un infini ; voilà qui est absurde. Rapportée au cadre conceptuel fixé par Aristote, cette «absurdité» signifie que l'infini n'est pas une entité, que c'est un processus d'inachèvement ; à ce titre, il n'y a aucun sens à le traiter comme une quantité, à distinguer différents infinis, à comparer des infinis, bref à le manipuler comme une forme.

Quoi qu'il en soit, tous ceux qui se plaçaient sur le terrain de la théorie aristotélicienne, pour la défendre ou pour en récuser certaines conclusions, ont abondamment invoqué ce type d'argument. Si le monde est sans commencement, écrira ainsi Philopon, alors on doit dire que le nombre des hommes engendrés jusqu'au temps de Socrate est infini ; en y ajoutant le nombre des hommes engendrés depuis Socrate jusqu'à aujourd'hui, on obtiendrait «quelque chose plus grand que l'infini». Autre paradoxe énoncé par Philopon : quand le Soleil accomplit une révolution, la Lune en effectue 12 ; en supposant le monde sans commencement, on doit bien admettre, d'une

manière ou d'une autre, que les révolutions du Soleil sont infiniment nombreuses, et que, par conséquent, les révolutions de la Lune représentent un infini douze fois plus grand qu'un autre infini – autre «absurdité». On devine la conclusion de Philopon, à savoir que le point de départ de ce raisonnement doit être récusé, et que les aristotéliciens eux-mêmes doivent convenir que le monde a bien un commencement.

Les critiques de Philopon rencontrèrent un écho considérable dans les traditions grecque, arabe, hébraïque et latine ; elles donneront naissance à une foule d'arguments dérivés. Par exemple, certains théologiens musulmans opposeront aux philosophes arabes aristotéliciens un argument qui fera fortune dans les débats de la scolastique médiévale. Supposons le monde sans commencement. Alors le nombre des âmes séparées des corps après la mort, et qui survivent éternellement à ces corps, constitue bien un nombre infini, et actuel ; n'est-ce pas là une contradiction dans le raisonnement des philosophes (aristotéliciens), qui devrait les contraindre à reconnaître que la thèse de l'éternité du monde est (philosophiquement) intenable ? Maniant les outils logiques et conceptuels du discours philosophique avec

une efficacité souvent redoutable, ces théologiens concluaient, du reste, à l'impossibilité de toute espèce d'infini, potentiel comme actuel.

On s'en doute, les répliques des philosophes, soucieux de légitimer la cohérence de la pensée d'inspiration aristotélicienne, n'ont pas manqué ; et les arguments déployés à cette occasion ont nourri le débat sur l'infini, qui se prolongera dans les traditions théologiques et philosophiques d'expression latine et hébraïque. La critique du point de vue aristotélicien s'est aussi exercée dans d'autres directions. Beaucoup plus rarement, il est vrai, mais avec au moins autant de rigueur, certains ont adopté un infinitisme de principe, qui les a conduits à remettre en cause l'ensemble du dispositif conceptuel aristotélicien. C'est le cas de Thābit ibn Qurra.

Abū'l-Ḥassan Thābit ibn Qurra al-Ḥarrānī, le Sabéen (mort en 901) est l'un des plus prestigieux représentants de la science arabe du IX^e siècle. Originaire de Ḥarrān, en Anatolie, il fut remarqué pour ses dons exceptionnels par les trois frères Banū Mūsā, savants et mécènes de Bagdad, qui l'intégrèrent aux cercles de savants encouragés et financés par le calife. Traducteur du grec en arabe, d'œuvres d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, de Ptolémée, de Nicomaque de Gêrèse, Thābit est lui-même l'auteur de traités novateurs, voire fondateurs, dans divers domaines des mathématiques (géométrie infinitésimale, algèbre, arithmétique et théorie des nombres) et de l'astronomie. On lui attribue aussi des écrits médicaux. Il semble avoir supervisé des traductions du syriaque en arabe – la langue syriaque fut un très important relais de la culture grecque avant l'avènement de l'islam ; à Ḥarrān, centre syriaque important, dominait la religion syncrétiste des Sabéens, dont Thābit fut peut-être un dignitaire.

Comment Thābit ibn Qurra envisage l'infini actuel

Le texte de Thābit que nous allons commenter témoigne que ce dernier était, à côté de ses activités proprement scientifiques, pleinement engagé dans les débats philosophiques et théologiques de son temps, à propos desquels il affichait avec autorité un point de vue original. Ce point de vue nous est parvenu sous la forme de réponses aux questions posées par un de ses disciples,

le chrétien Abū Mūsā 'Isā ibn Usayyid. De ce texte important, soulignons trois aspects qui fixent le cadre du débat : l'importance de la controverse théologique relative au dénombrement des âmes et à la connaissance par Dieu de l'infini des êtres singuliers ; l'expression nette d'un infinitisme de principe qui se réclame des propriétés mathématiques du nombre ; la défense d'une conception philosophique du nombre et des figures géométriques qui rompt radicalement avec les principes aristotéliens.

Le texte s'ouvre d'emblée sur la controverse dont nous avons souligné les enjeux : est-il contradictoire d'envisager que les âmes constituent une multiplicité infinie ? Bien que le texte ne le mentionne pas, il est certain que cette question était associée à celle de l'éternité du monde. Toutefois, l'angle sous lequel elle est présentée ici est celui de la nature de la connaissance divine : si celle-ci envisage chaque être dans sa singularité (chaque âme) et dans son devenir, ne porte-t-on pas atteinte à la simplicité absolue de cette connaissance ? N'est-il pas plus juste de postuler que Dieu ne connaît que les «universaux» (les principes généraux : «le» nombre, «la» grandeur, l'immortalité de l'âme), et non les «singuliers» (chaque nombre, chaque grandeur, chaque âme séparée) ?

Intervenant à la fois sur le plan théologique et philosophique, et commentant un exemple astronomique, celui des éclipses, Thābit entend souligner que, de toute manière, on est conduit à admettre la possibilité d'un infini numérique actuel : au cours de sa réponse à la question relative au problème des âmes (à savoir sont-elles en nombre fini ou non ?), Thābit a dit : «Je m'étonne de celui qui dit que Dieu – qu'Il soit béni et exalté – ne connaît pas les particuliers, mais connaît les universaux, et j'ignore ce qu'il dirait si on l'interrogeait sur Sa connaissance, par exemple, de l'éclipse : est-ce qu'Il en connaît la nature et l'existence seulement, ou bien Il connaît les éclipses qui ont

eu lieu au cours du passé, et celles qui auront lieu, une à une, et le moment déterminé où elles ont eu lieu et où elles auront lieu. S'Il ne connaît rien d'autre que la nature générale de l'éclipse, il en résulterait que Son savoir est moindre que le savoir des astronomes...»

On l'a compris, Thābit n'accepte pas les arguments de ceux qui jugent impossible pour la connaissance divine d'appréhender les «particuliers». Il rappelle que, même en acceptant cette thèse, on n'en est pas moins conduit à admettre l'idée d'un infini actuel : «De plus, si l'on acceptait, par esprit de conciliation, qu'Il ne connaît pas les particuliers, il n'en reste pas moins qu'il est des choses universelles qui sont des espèces infinies, et qu'Il connaît pour elles-mêmes, simultanément, en acte ; par exemple, les espèces des figures géométriques, dont Il connaît chacune, ses accidents, ses singularités, et tous ses autres

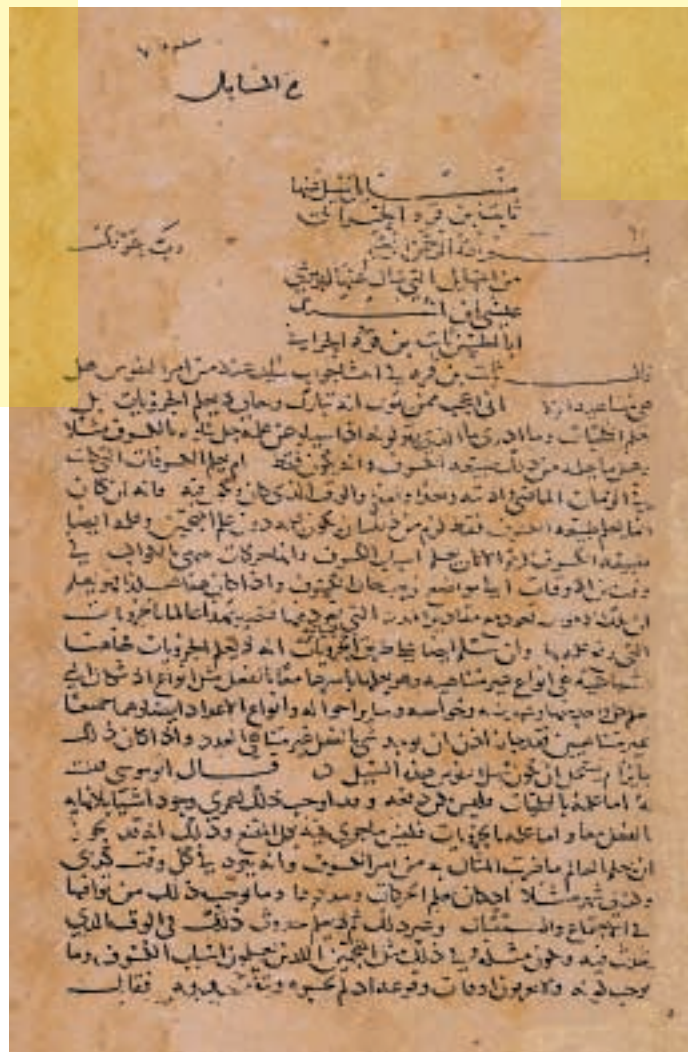
aspects ; et aussi les espèces des nombres ; et ces deux d'espèces sont infinies. Il est donc possible qu'une chose existe en acte, et infinie en nombre ; si cela est possible, alors il n'est pas impossible qu'il en soit de même pour les âmes...»

La comparaison des infinis numériques

Au terme de longs développements consacrés à ce problème de la connaissance divine, Thābit est invité par son questionneur à commenter l'argument si souvent invoqué dans les débats sur l'infini, selon lequel «un infini ne peut être plus grand qu'un infini».

Au-delà de quelques difficultés de lecture, l'argument exposé dans ce texte est aussi clair que novateur. C'est la première fois, à notre connaissance, qu'une véritable arithmétique de l'infini est ébauchée à partir des propriétés arithmétiques du nombre entier. Du reste, une formulation mathématiquement cohérente n'interviendra que 1 000 ans après Thābit, avec les travaux de Georg Cantor et sa théorie du transfini.

Précisons le contenu de l'argument, pour en mesurer l'audace. Pour Thābit, de toute évidence, «il y a un nombre infini», et il s'agit bien d'un infini actuel. Aucune définition de cette notion n'est clairement énoncée, mais on comprend toutefois que l'infinie multiplicité des espèces numériques (on dirait aujourd'hui l'infinitude de l'ensemble des entiers) s'identifie à la nature même du «nombre en soi» (on dirait aujourd'hui l'infinitude du dénombrable). Répondant ici en mathématicien à l'argument classique : «un infini ne peut être plus grand qu'un infini», autrement dit, «il est absurde d'énoncer des relations d'ordre à propos de l'infini», Thābit réplique qu'il est



2. MANUSCRIT (premier folio) de Thābit ibn Qurra où il réfute qu'«un infini ne peut être plus grand qu'un infini».