

le chrétien Abū Mūsā 'Isā ibn Usayyid. De ce texte important, soulignons trois aspects qui fixent le cadre du débat : l'importance de la controverse théologique relative au dénombrement des âmes et à la connaissance par Dieu de l'infini des êtres singuliers ; l'expression nette d'un infinitisme de principe qui se réclame des propriétés mathématiques du nombre ; la défense d'une conception philosophique du nombre et des figures géométriques qui rompt radicalement avec les principes aristotéliens.

Le texte s'ouvre d'emblée sur la controverse dont nous avons souligné les enjeux : est-il contradictoire d'envisager que les âmes constituent une multiplicité infinie ? Bien que le texte ne le mentionne pas, il est certain que cette question était associée à celle de l'éternité du monde. Toutefois, l'angle sous lequel elle est présentée ici est celui de la nature de la connaissance divine : si celle-ci envisage chaque être dans sa singularité (chaque âme) et dans son devenir, ne porte-t-on pas atteinte à la simplicité absolue de cette connaissance ? N'est-il pas plus juste de postuler que Dieu ne connaît que les « universaux » (les principes généraux : « le » nombre, « la » grandeur, l'immortalité de l'âme), et non les « singuliers » (chaque nombre, chaque grandeur, chaque âme séparée) ?

Intervenant à la fois sur le plan théologique et philosophique, et commentant un exemple astronomique, celui des éclipses, Thābit entend souligner que, de toute manière, on est conduit à admettre la possibilité d'un infini numérique actuel : au cours de sa réponse à la question relative au problème des âmes (à savoir sont-elles en nombre fini ou non ?), Thābit a dit : « Je m'étonne de celui qui dit que Dieu – qu'Il soit béni et exalté – ne connaît pas les particuliers, mais connaît les universaux, et j'ignore ce qu'il dirait si on l'interrogeait sur Sa connaissance, par exemple, de l'éclipse : est-ce qu'Il en connaît la nature et l'existence seulement, ou bien Il connaît les éclipses qui ont

eu lieu au cours du passé, et celles qui auront lieu, une à une, et le moment déterminé où elles ont eu lieu et où elles auront lieu. S'Il ne connaît rien d'autre que la nature générale de l'éclipse, il en résulterait que Son savoir est moindre que le savoir des astronomes... »

On l'a compris, Thābit n'accepte pas les arguments de ceux qui jugent impossible pour la connaissance divine d'appréhender les « particuliers ». Il rappelle que, même en acceptant cette thèse, on n'en est pas moins conduit à admettre l'idée d'un infini actuel : « De plus, si l'on acceptait, par esprit de conciliation, qu'Il ne connaît pas les particuliers, il n'en reste pas moins qu'il est des choses universelles qui sont des espèces infinies, et qu'Il connaît pour elles-mêmes, simultanément, en acte ; par exemple, les espèces des figures géométriques, dont Il connaît chacune, ses accidents, ses singularités, et tous ses autres

aspects ; et aussi les espèces des nombres ; et ces deux d'espèces sont infinies. Il est donc possible qu'une chose existe en acte, et infinie en nombre ; si cela est possible, alors il n'est pas impossible qu'il en soit de même pour les âmes... »

La comparaison des infinis numériques

Au terme de longs développements consacrés à ce problème de la connaissance divine, Thābit est invité par son questionneur à commenter l'argument si souvent invoqué dans les débats sur l'infini, selon lequel « un infini ne peut être plus grand qu'un infini ».

Au-delà de quelques difficultés de lecture, l'argument exposé dans ce texte est aussi clair que novateur. C'est la première fois, à notre connaissance, qu'une véritable arithmétique de l'infini est ébauchée à partir des propriétés arithmétiques du nombre entier. Du reste,

une formulation mathématiquement cohérente n'interviendra que 1 000 ans après Thābit, avec les travaux de Georg Cantor et sa théorie du transfini.

Précisons le contenu de l'argument, pour en mesurer l'audace. Pour Thābit, de toute évidence, « il y a un nombre infini », et il s'agit bien d'un infini actuel. Aucune définition de cette notion n'est clairement énoncée, mais on comprend toutefois que l'infinie multiplicité des espèces numériques (on dirait aujourd'hui l'infinitude de l'ensemble des entiers) s'identifie à la nature même du « nombre en soi » (on dirait aujourd'hui l'infinitude du dénombrable). Répondant ici en mathématicien à l'argument classique : « un infini ne peut être plus grand qu'un infini », autrement dit, « il est absurde d'énoncer des relations d'ordre à propos de l'infini », Thābit réplique qu'il est



2. MANUSCRIT (premier folio) de Thābit ibn Qurra où il réfute qu'« un infini ne peut être plus grand qu'un infini ».

parfaitement possible de donner un sens mathématique à une telle relation d'ordre. Le geste opératoire décisif de Thābit consiste, pour parler en termes modernes, à définir l'«égalité» de deux ensembles infinis (les nombres pairs et les nombres impairs) par leur équipotence : l'ensemble infini des pairs «est égal» à l'ensemble des impairs, car à tout entier pair on peut associer un entier impair, et réciproquement. À partir de là, il peut conclure que les entiers pairs représentent la moitié de tous les entiers : il y a autant d'entiers pairs que d'entiers impairs, et tous les entiers sont épuisés par cette partition.

En affirmant que l'infini des entiers est «double» de l'infini des entiers pairs, Thābit invalide le fameux argument discuté (il y a bien un infini plus grand qu'un autre infini). Il va même plus loin : en étendant la remarque relative aux pairs et impairs, il exhibe un infini «égal» au tiers de l'infini des entiers (les entiers de la forme $3p$, qui ont la même infinité que les entiers de la forme $3p + 1$ et que celle des entiers de la forme $3p + 2$, ce qui permet de diviser l'infini des entiers en trois infinis «égaux»), un infini «égal» au quart de l'infini des entiers, ..., un infini égal au n -ième de l'infini des entiers.

Opérations sur l'infini

L'égalité naïve, celle qui passe par l'énumération, inapplicable à l'infini, a été remplacée par un autre type de comparaison permettant d'évaluer les rapports de proportion entre «le nombre dans sa totalité» et certaines de ses parties : les nombres pairs et impairs, les multiples de 3, les multiples de 4, ..., les multiples de n .

Ce faisant, Thābit ne met pas en cause l'axiome selon lequel «le tout est plus grand que sa partie». L'infini des entiers, comme un tout, reste plus grand que l'infini des entiers pairs, puisqu'il en est le «double». D'autres

infinistes, après lui, sauront orienter leur réflexion en réévaluant le rapport du tout à sa partie, lorsque des quantités infinies sont en jeu. Au XIX^e siècle, Richard Dedekind, à la même époque que Cantor, définira ainsi précisément l'ensemble infini comme étant un ensemble «égal» à l'une de ses parties.

Le lecteur averti de la définition du transfini cantorien aura relevé que Thābit ne dégage pas, comme Cantor, l'idée d'une cardinalité infinie, propre à tout ensemble dénombrable ; dans cette perspective, tous les ensembles infinis que nous avons évoqués seraient «équipotents», c'est-à-dire égaux au sens de Cantor, ce qui n'est pas le cas pour Thābit. Ainsi, Thābit ne dit pas qu'il y a «autant» de nombres entiers que de nombres entiers pairs, dans la mesure où l'on peut faire correspondre à tout entier un entier pair et réciproquement. Pour autant, il n'est pas nécessaire de voir dans Thābit une «anticipation» de Cantor pour mesurer l'intérêt de la pensée du savant arabe.

En revanche, malgré le millénaire d'histoire qui les sépare, on pourrait rapprocher ces deux savants par le sentiment qui les habite tous deux quant au nécessaire élargissement de l'idée de nombre, telle qu'elle dominait les cultures respectives de leurs époques. Pour fonder cette remarque, il conviendrait d'analyser minutieusement les développements consacrés par Thābit au nombre des catégories de pensée, au nombre des espèces de la quantité, à la quantification de la qualité, au rapport du genre à l'espèce, au statut des accidents. Voilà qui dépasse largement notre propos. Contentons-nous de résumer l'originalité et l'audace théorique de Thābit : non seulement il «opère» sur des infinis, leur conférant ainsi un statut que leur refusait la tradition aristotélicienne, mais, ce faisant, il élargit la notion même de nombre et le cadre conceptuel constitutif de cette tradition.

Tony LÉVY est chercheur au CNRS, au Centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales (Paris-Villejuif).

Shlomo PINES, *Thābit ibn Qurra's Conception of Number and Theory of the Mathematical Infinite*, in Pines, *Studies in Arabic Versions of Greek Texts and in Mediaeval Science (The Collected Works of Shlomo Pines, vol. II)*, Édition Magnes Press, Jérusalem, et Brill, Leiden, 1986, pp. 423-429.

Tony LÉVY, *Figures de l'infini. Les mathématiques au miroir des cultures*, Éditions du Seuil, Paris, 1987, pp. 101-109.

Abdelhamid I. SABRA, *Thabit ibn Qurra on the Infinite and Other Puzzles. Edition and Translation of his Discussions with Ibn Usayyid*, in *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, vol. 11, pp. 1-33, 1997