

La science du mouvement au XVII^e siècle

MICHEL BLAY

À la fin du XVII^e siècle et au début du XVIII^e, les mathématiciens décrivent le mouvement et introduisent la notion de vitesse, en évitant les paradoxes qui résultaient de l'usage impropre et intuitif de l'infini.



Au V^e siècle avant notre ère, dans la ville grecque d'Élée, le philosophe Zénon bute sur un grave paradoxe quand il analyse le mouvement : pour atteindre un point donné, un mobile doit d'abord parcourir la moitié de la distance qui le sépare de ce but, puis la moitié de la distance restante, puis encore la moitié de la distance restante, et ainsi de suite à l'infini. Comment parcourir une infinité de moitiés en un temps fini ? Cet infini qui s'introduit dans l'analyse du mouvement troublera physiciens et mathématiciens jusqu'à la fin du XVII^e siècle. À cette époque, et au début du siècle suivant, la science du mouvement se clarifie enfin. Une partie notable des progrès est due au physicien français Pierre Varignon (1654-1722), qui publie plusieurs articles dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, autour des années 1700. Varignon se fonde sur les résultats mathématiques obtenus entre 1684 et 1686 par Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), puis par Isaac Newton (1642-1727) : ce « calcul différentiel et intégral » permet de déterminer mathématiquement la pente de la tangente à une courbe, ou l'aire entre

une courbe et un axe. L'utilisant, Varignon trouve une formule très simple, qui décrit le mouvement d'un corps sur lequel s'exerce une force, notamment dans le cas des forces centrales, c'est-à-dire des forces qui s'exercent entre un point, attracteur ou répulsif, et un mobile qui se déplace sur une droite.

L'impossible géométrie du mouvement

Comment le calcul différentiel a-t-il permis de résoudre les difficultés antérieures de la science du mouvement ? Pour le comprendre, revenons d'abord aux enjeux de la géométrisation de la science du mouvement au XVII^e siècle. Les physiciens voulaient alors comprendre les mouvements par des interprétations géométriques déductives, sur le modèle des *Éléments* d'Euclide. Les principales questions portaient sur la continuité des mouvements, sur leur début et sur leur fin. Comment expliquer la variété des mouvements accélérés ? Étaient-ils, comme l'avaient proposé certains philosophes, un mélange de mouvements et de repos ? Ces questions avaient troublé Galilée (1564-1642), Bonaventura

Cavalieri (1598-1647), Blaise Pascal (1623-1662) et d'autres savants du XVII^e siècle.

Dans une lettre adressée à Galilée en date du 21 mars 1626, Cavalieri souligne l'importance et la difficulté des problèmes posés, dans le cadre de la géométrisation, par le commencement et l'évolution continue du mouvement : « Lorsqu'on en arrive à devoir prouver que le mobile qui, du repos, doit passer à un degré quelconque de vitesse, [...] par les degrés intermédiaires, je ne trouve aucune raison qui me tranquillise, bien qu'il me semble que généralement il en soit ainsi. » La quête d'une raison qui tranquillise est à la fois un programme de travail et une attitude d'esprit ; c'est la volonté de comprendre le commencement et l'évolution continue du mouvement ; c'est aussi la volonté d'expliquer le mouvement par les mathématiques.

Cette étude est très difficile, car l'infini y apparaît immédiatement. Pascal le mentionne explicitement dans son petit traité intitulé *De l'esprit géométrique* : « Quelque prompt que soit un mouvement, on peut en concevoir un qui le soit davantage, et hâter encore ce dernier ; et ainsi toujours à l'infini,



Galileo Galilei (1564-1642)

sans jamais arriver à un qui le soit de telle sorte qu'on ne puisse plus y ajouter. Et au contraire, quelque lent que soit un mouvement, on peut le retarder davantage, et encore ce dernier ; et ainsi à l'infini, sans jamais arriver à un tel degré de lenteur qu'on ne puisse encore en descendre à une infinité d'autres, sans tomber dans le repos». En langage moderne, les questions sont : comment traiter mathématiquement de vitesses infiniment petites ? Comment traiter mathématiquement de vitesses infiniment grandes ?

Galilée rencontre les mêmes difficultés. Dans ses *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, publiés en 1638, il fait dire à son ami et porte-parole Salviati : «Vous ne refuserez pas, je crois, de m'accorder qu'une pierre, tombant de l'état

de repos, acquiert ses degrés successifs de vitesse selon l'ordre dans lequel ces mêmes degrés diminueraient et se perdraient, si une force motrice la reconduisait à la même hauteur ; et le refuseriez-vous que je ne vois pas comment la pierre, dont la vitesse diminue et se consume en totalité au cours de son ascension, pourrait atteindre l'état de repos sans être passée par tous les degrés successifs de lenteur.»

Galilée souligne la continuité caractérisant, selon lui, la croissance ou la décroissance de la

vitesse dans un mouvement naturellement accéléré, comme la chute d'un corps pesant (un «grave»). Dans un tel mouvement, «un grave ne demeure en aucun de ces degrés de vitesse pendant un temps fini». Ce qui revient

encore à dire que, dans un mouvement accéléré ou retardé, un corps qui sort du repos ou qui y retourne passe par une infinité de degrés de vitesses dans un intervalle de temps qui, si petit qu'il soit, contient une infinité d'instants.

Les problèmes soulevés par cette analyse sont d'une extrême difficulté : s'il y a une infinité de degrés de lenteur pour atteindre le repos, ne faut-il pas un temps infini pour que cet arrêt du mouvement puisse s'accomplir, pour que le mobile animé d'un tel mou-

vement s'arrête en passant successivement par tous les degrés de lenteur ? À l'inverse, pour qu'un mouvement commence, en passant successivement par tous les degrés croissants de vitesse, ne faut-il pas, là aussi, un temps infini pour atteindre la moindre vitesse ? Dans un cas, le repos est impossible à atteindre ; dans l'autre, c'est le mouvement qui ne peut commencer. Or, bien évidemment, les mouvements commencent et finissent.



Isaac Newton (1642-1727)

De l'état de repos à une vitesse finie

Une réponse consiste à rejeter l'idée d'un commencement non fini du mouvement ou, plutôt, à considérer que le mouvement de chute des graves commence, non pas à partir d'une vitesse nulle par accroissements successifs continus, mais à partir d'une vitesse finie. C'est ainsi qu'Edme Mariotte (1620-1684), dans son *Traité de la percussion ou choc des corps*, publié à Paris en 1673, refuse l'idée qu'un mouvement accéléré le soit dès le premier instant. Son argumentation repose sur un rappel des difficultés engendrées par les paradoxes de Zénon sur l'infini, et aussi sur diverses expériences en rapport avec l'écoulement des fluides. Il propose d'éliminer l'infini au début du mouvement en considérant qu'il n'y a pas, au sens strict, de début au mouvement. Dès le premier instant, le corps est animé d'une vitesse très petite, mais finie.

De même, le mathématicien allemand

Hartsocker propose que le repos soit atteint sans que le mobile passe par tous les degrés de lenteur. Dans une lettre adressée à Leibniz le 6 janvier 1712, Hartsocker écrit : «Il y a une loi dans la Nature, dites-vous, Monsieur, qui porte qu'il n'y a aucun passage *per saltum* [par saut]. Je vous l'accorde dans un certain sens ; mais quand vous dites que cette loi ne permet pas qu'il n'y ait point de milieu entre le dur et le fluide, je n'y vois aucune nécessité. Si vous ne saviez pas par l'expérience, Monsieur, qu'un corps qui se meut avec



Blaise Pascal (1623-1662)



Pierre Varignon (1654-1722)



Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

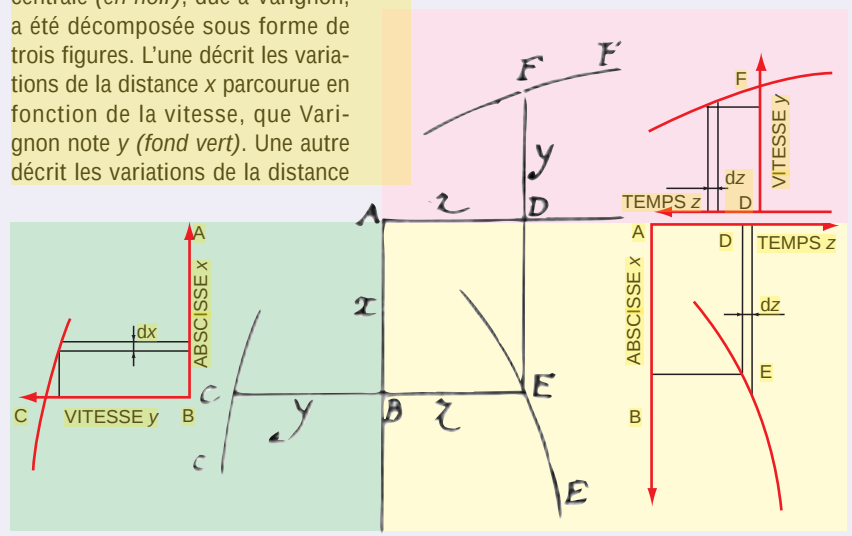


Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Le mémoire du 5 juillet 1698 de Varignon

Dans ce mémoire, Pierre Varignon explicite algébriquement les quantités finies et infiniment petites qui s'imposent pour la description des mouvements. La figure centrale (en noir), due à Varignon, a été décomposée sous forme de trois figures. L'une décrit les variations de la distance x parcourue en fonction de la vitesse, que Varignon note y (fond vert). Une autre décrit les variations de la distance

x parcourue en fonction du temps, que Varignon note z (fond jaune). La troisième décrit les variations de la vitesse en fonction du temps z (fond rose).



tout autant de vitesse qu'il vous plaira peut demeurer en repos dès l'instant du choc, sans perdre peu à peu et par degré son mouvement, ne diriez-vous pas par votre loi que cela est impossible?»

À ces approches, on peut associer celles de Pierre Gassendi (1592-1655) ou, plus tard, de son commentateur François Bernier, pour lesquels le mouvement varié est un mélange de repos et de mouvements, la continuité n'étant qu'apparente, en raison d'une certaine persistance des images rétinienne, pour parler en termes modernes. Toutefois ces approches n'offrent aucune prise réelle à la géométrisation. La pseudo-évidence expérimentale, de Mariotte en particulier, n'apprend rien.

Un premier effort de Leibniz

Alors qu'il ne développera son calcul différentiel et intégral qu'en 1676, Leibniz rédige en 1670 une *Théorie du mouvement abstrait*, qui a essentiellement pour objet d'édifier une théorie purement rationnelle du mouvement. Ce travail s'inspire de résultats mathématiques que Cavalieri avait exposés dans sa *Géométrie au moyen des indivisibles*, publiée à Bologne en 1635.

Leibniz considère que le mouvement est continu, c'est-à-dire qu'il n'est «nullement entrecoupé de petits repos», comme cela était parfois envisagé par les «atomistes», c'est-à-dire ceux qui acceptaient l'idée du discontinu dans

la matière, l'espace ou le temps. Continu, le mouvement est, non seulement divisible à l'infini, mais effectivement divisé, en ce sens qu'il y a des parties données en acte dans le continu et que «celles-ci sont infinies en acte». Leibniz introduit donc un infini «en acte» ou «actuel», c'est-à-dire qu'il pose effectivement un infini. Cependant, pour Leibniz, «il n'y a pas de minimum dans l'espace ou le temps», car un tel minimum «implique contradiction» : s'il existait un minimum, il y aurait autant de minimums dans le tout que dans la partie, puisque toute partie de même espèce que le tout est encore infiniment divisible. Il s'agit là, toujours, des paradoxes de Zénon : un segment, aussi petit que l'on veut, contient une infinité de points ; c'est un infini en acte.

Leibniz échappe à cette contradiction en adaptant la méthode de Cavalieri, méthode qui vise, en restant à l'intérieur des mathématiques euclidiennes, à traiter de questions qui engageraient la considération de sommes infinies. Pour cela, Cavalieri introduit la notion d'agrégat (on parlera ainsi, par exemple, de l'agrégat de toutes les lignes ou de tous les degrés de vitesse), et établit les rapports entre l'agrégat de toutes les lignes de deux figures et celui des aires de ces deux figures. Cette approche précise et rigoureuse sur le plan mathématique sera, le plus souvent, interprétée comme la mise en œuvre d'une simple somme

de points, de lignes, etc., ce qui, bien évidemment, repose avec acuité la question du continu et de l'infini.

Leibniz est plus préoccupé par l'analyse du mouvement et des trajectoires que par les pures questions de géométrie, qui reposent le problème de la composition du continu. Il introduit son concept d'«indivisible» afin de résoudre le problème du mouvement : «Des indivisibles ou inétendus sont donnés, sans quoi ni le commencement ni la fin du mouvement et du corps ne sont concevables.»

Pour Leibniz, le commencement appartient à l'espace, au temps, au mouvement, sans pour autant être divisible. Comme on l'a vu, la notion d'un commencement divisible est contradictoire. Il y a donc des indivisibles, constitutifs de l'espace, du temps et du mouvement et, cependant, hétérogènes à ce qu'ils constituent. Ce faisant, Leibniz introduit alors des êtres mathématiques pour le moins surprenants, que sont «le commencement du corps, de l'espace, du mouvement, du temps (à savoir le point, l'effort, l'instant)». C'est à Thomas Hobbes (1588-1679) que Leibniz emprunte, en le transformant, le concept d'effort pour en faire son indivisible de mouvement : «L'effort est au mouvement ce que le point est à l'espace, soit comme l'unité à l'infini, il est en effet le commencement et la fin du mouvement.» Il existe donc un indivisible de mouvement, l'«effort», qui, d'un certain point de vue, bloque la régression à l'infini, qui interdisait de penser le commencement ou la fin du mouvement.

Varignon et l'algorithme de la cinématique

Leibniz publie le texte fondateur du nouveau calcul différentiel et intégral en octobre 1684. Le titre de ce mémoire indique bien son objet : *Nouvelle méthode pour chercher les maxima et les minima, ainsi que les tangentes, méthode que n'embarrassent ni les expressions fractionnaires ni les expressions irrationnelles*. Leibniz écrit notamment : «Lorsqu'on connaît l'algorithme, si je peux dire, de ce calcul que j'appelle différentiel, on peut trouver par le calcul ordinaire toutes les autres équations différentielles, les maxima et minima, ainsi que les tangentes.»

La diffusion du nouveau calcul est lente et difficile. À partir des années 1690, les deux frères Jean (1667-1748)