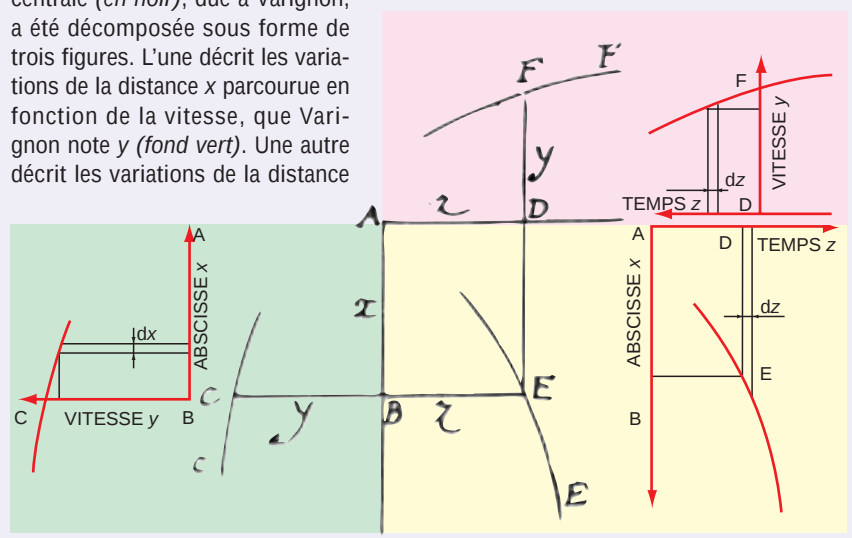


Le mémoire du 5 juillet 1698 de Varignon

Dans ce mémoire, Pierre Varignon explicite algébriquement les quantités finies et infiniment petites qui s'imposent pour la description des mouvements. La figure centrale (en noir), due à Varignon, a été décomposée sous forme de trois figures. L'une décrit les variations de la distance x parcourue en fonction de la vitesse, que Varignon note y (fond vert). Une autre décrit les variations de la distance

x parcourue en fonction du temps, que Varignon note z (fond jaune). La troisième décrit les variations de la vitesse en fonction du temps z (fond rose).



tout autant de vitesse qu'il vous plaira peut demeurer en repos dès l'instant du choc, sans perdre peu à peu et par degré son mouvement, ne diriez-vous pas par votre loi que cela est impossible?»

À ces approches, on peut associer celles de Pierre Gassendi (1592-1655) ou, plus tard, de son commentateur François Bernier, pour lesquels le mouvement varié est un mélange de repos et de mouvements, la continuité n'étant qu'apparente, en raison d'une certaine persistance des images rétinienne, pour parler en termes modernes. Toutefois ces approches n'offrent aucune prise réelle à la géométrisation. La pseudo-évidence expérimentale, de Mariotte en particulier, n'apprend rien.

Un premier effort de Leibniz

Alors qu'il ne développera son calcul différentiel et intégral qu'en 1676, Leibniz rédige en 1670 une *Théorie du mouvement abstrait*, qui a essentiellement pour objet d'édifier une théorie purement rationnelle du mouvement. Ce travail s'inspire de résultats mathématiques que Cavalieri avait exposés dans sa *Géométrie au moyen des indivisibles*, publiée à Bologne en 1635.

Leibniz considère que le mouvement est continu, c'est-à-dire qu'il n'est «nullement entrecoupé de petits repos», comme cela était parfois envisagé par les «atomistes», c'est-à-dire ceux qui acceptaient l'idée du discontinu dans

la matière, l'espace ou le temps. Continu, le mouvement est, non seulement divisible à l'infini, mais effectivement divisé, en ce sens qu'il y a des parties données en acte dans le continu et que «celles-ci sont infinies en acte». Leibniz introduit donc un infini «en acte» ou «actuel», c'est-à-dire qu'il pose effectivement un infini. Cependant, pour Leibniz, «il n'y a pas de minimum dans l'espace ou le temps», car un tel minimum «implique contradiction» : s'il existait un minimum, il y aurait autant de minimums dans le tout que dans la partie, puisque toute partie de même espèce que le tout est encore infiniment divisible. Il s'agit là, toujours, des paradoxes de Zénon : un segment, aussi petit que l'on veut, contient une infinité de points ; c'est un infini en acte.

Leibniz échappe à cette contradiction en adaptant la méthode de Cavalieri, méthode qui vise, en restant à l'intérieur des mathématiques euclidiennes, à traiter de questions qui engageraient la considération de sommes infinies. Pour cela, Cavalieri introduit la notion d'agrégat (on parlera ainsi, par exemple, de l'agrégat de toutes les lignes ou de tous les degrés de vitesse), et établit les rapports entre l'agrégat de toutes les lignes de deux figures et celui des aires de ces deux figures. Cette approche précise et rigoureuse sur le plan mathématique sera, le plus souvent, interprétée comme la mise en œuvre d'une simple somme

de points, de lignes, etc., ce qui, bien évidemment, repose avec acuité la question du continu et de l'infini.

Leibniz est plus préoccupé par l'analyse du mouvement et des trajectoires que par les pures questions de géométrie, qui reposent le problème de la composition du continu. Il introduit son concept d'«indivisible» afin de résoudre le problème du mouvement : «Des indivisibles ou inétendus sont donnés, sans quoi ni le commencement ni la fin du mouvement et du corps ne sont concevables.»

Pour Leibniz, le commencement appartient à l'espace, au temps, au mouvement, sans pour autant être divisible. Comme on l'a vu, la notion d'un commencement divisible est contradictoire. Il y a donc des indivisibles, constitutifs de l'espace, du temps et du mouvement et, cependant, hétérogènes à ce qu'ils constituent. Ce faisant, Leibniz introduit alors des êtres mathématiques pour le moins surprenants, que sont «le commencement du corps, de l'espace, du mouvement, du temps (à savoir le point, l'effort, l'instant)». C'est à Thomas Hobbes (1588-1679) que Leibniz emprunte, en le transformant, le concept d'effort pour en faire son indivisible de mouvement : «L'effort est au mouvement ce que le point est à l'espace, soit comme l'unité à l'infini, il est en effet le commencement et la fin du mouvement.» Il existe donc un indivisible de mouvement, l'«effort», qui, d'un certain point de vue, bloque la régression à l'infini, qui interdisait de penser le commencement ou la fin du mouvement.

Varignon et l'algorithme de la cinématique

Leibniz publie le texte fondateur du nouveau calcul différentiel et intégral en octobre 1684. Le titre de ce mémoire indique bien son objet : *Nouvelle méthode pour chercher les maxima et les minima, ainsi que les tangentes, méthode que n'embarrassent ni les expressions fractionnaires ni les expressions irrationnelles*. Leibniz écrit notamment : «Lorsqu'on connaît l'algorithme, si je peux dire, de ce calcul que j'appelle différentiel, on peut trouver par le calcul ordinaire toutes les autres équations différentielles, les maxima et minima, ainsi que les tangentes.»

La diffusion du nouveau calcul est lente et difficile. À partir des années 1690, les deux frères Jean (1667-1748)

et Jacques Bernoulli (1654-1705), en contact étroit (principalement épistolaire) avec Leibniz, appliqueront les nouvelles méthodes de ce dernier aux sujets les plus divers, l'occasion leur en étant souvent fournie par les défis mathématiques qu'ont l'habitude de se lancer les savants d'Europe.

Au cours de son séjour parisien, pendant l'hiver 1691-1692, Jean Bernoulli initie, par des *Leçons particulières*, le marquis Guillaume de L'Hospital (1661-1704) au calcul leibnizien. C'est lui qui saura lever les indéterminations du type $0/0$. Ces leçons, portant à la fois sur le calcul différentiel et sur le calcul intégral, constitueront la base à partir de laquelle L'Hospital rédigera le premier manuel de calcul différentiel. Celui-ci sera publié à la fin du mois de juin 1696 sous le titre *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. L'introduction des nouvelles méthodes se trouve ainsi grandement facilitée.

Malgré les vives polémiques que suscitent ces méthodes à l'Académie royale des sciences de Paris jusqu'à la fin des années 1710, Varignon assimile rapidement les principaux éléments du nouveau calcul, et il s'attache, entre les années 1695 et 1705 à reprendre l'étude du mouvement. Le travail de Varignon s'effectue en deux phases : d'abord, il introduit le concept de «vitesse dans chaque instant» ; puis il définit la «force accélératrice dans chaque instant». Observant les formules qu'il vient de construire à l'issue de cette double construction, Varignon en déduit ce que l'on nomme aujourd'hui l'«algorithme de la cinématique».

Dans deux mémoires, lus aux séances de l'Académie royale des sciences, respectivement le samedi 5 juillet et le samedi 6 septembre 1698, Varignon donne un nouveau départ à la science du mouvement,

en élaborant d'abord le concept de «vitesse dans chaque instant». Le premier mémoire donne une expression générale de la vitesse susceptible de traiter tous les mouvements dans le cas de trajectoires rectilignes, quel que soit le mode de variation de la vitesse ; il est intitulé *Règle générale pour toutes sortes de mouvements de vitesses quelconques variées à discrétion*.

Varignon considère comme uniforme la vitesse d'un corps pendant chaque instant de son mouvement. Il définit tout d'abord un certain nombre de variables à partir desquelles la mise en place conceptuelle peut être réalisée : «Soient $AB = x$ (voir l'encadré page ci-contre) les espaces parcourus en quelque sens qu'on voudra, $BE = z$ les temps employés à les parcourir, et $BC = y = DF$ les vitesses à chaque point

B de ces espaces.» Les variables, espace, temps et vitesse, étant maintenant représentées par les «axes», ou segments de droite, AB , BE et BC (ou DF), il associe ces variables deux à deux, afin d'engendrer ce qu'on nommerait, en termes modernes, un diagramme des espaces EE , et deux diagrammes des vitesses CC et FF : «De manière que la courbe EE (quelle qu'elle soit) formée par tous les points E , exprime les espaces par ses abscisses AB , et les temps employés à les parcourir, par ses ordonnées correspondantes BE ; la courbe CC (quelle qu'elle soit aussi) formée par tous les points C exprime de même les espaces par les abscisses AB , et les vitesses à chaque point B de ces espaces, par ses ordonnées correspondantes BC ; enfin la courbe FF (quelle qu'elle soit encore) exprime aussi par ses ordonnées DF ces mêmes vitesses comparées aux temps BE ou AD qui leur servent d'abscisses.»

«Cela posé, les instants seront notés dz ; l'espace parcouru dans chaque instant, dx ; et la vitesse avec laquelle dx aura été parcouru sera noté y .» Ainsi, dans un instant égal à dz , l'espace parcouru par le mobile sera égal à dx , tandis que la vitesse de ce mobile sera égale à y . Varignon affirme alors que cette vitesse, dans chaque instant, peut «être regardée comme uniforme : de sorte que $y \pm dy = y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = dx/dz$ pour la règle de tous les mouvements variés comme on voudra, c'est-à-dire quelque rapport d'espace, de temps ou de vitesse, qu'on suppose ; la vitesse de chaque instant étant toujours et partout égale au quotient de l'espace parcouru dans chaque instant divisé par cette même différentielle de temps» (aujourd'hui les notations ont changé : le temps s'exprime

par t et non plus par z , et la vitesse par v et non plus par y).



EDME MARIOTTE (1620-1684) a établi avec Robert Boyle la loi de compression des gaz, qu'il étudie ici expérimentalement. Il publia également un *Traité de la percussion ou choc des corps*, où il refusait l'idée qu'un mouvement accéléré le soit dès le premier instant. Il proposait que, dès le début d'un mouvement, le corps est animé d'une vitesse très petite, mais finie.