

et Jacques Bernoulli (1654-1705), en contact étroit (principalement épistolaire) avec Leibniz, appliqueront les nouvelles méthodes de ce dernier aux sujets les plus divers, l'occasion leur en étant souvent fournie par les défis mathématiques qu'ont l'habitude de se lancer les savants d'Europe.

Au cours de son séjour parisien, pendant l'hiver 1691-1692, Jean Bernoulli initie, par des *Leçons particulières*, le marquis Guillaume de L'Hospital (1661-1704) au calcul leibnizien. C'est lui qui saura lever les indéterminations du type $0/0$. Ces leçons, portant à la fois sur le calcul différentiel et sur le calcul intégral, constitueront la base à partir de laquelle L'Hospital rédigera le premier manuel de calcul différentiel. Celui-ci sera publié à la fin du mois de juin 1696 sous le titre *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. L'introduction des nouvelles méthodes se trouve ainsi grandement facilitée.

Malgré les vives polémiques que suscitent ces méthodes à l'Académie royale des sciences de Paris jusqu'à la fin des années 1710, Varignon assimile rapidement les principaux éléments du nouveau calcul, et il s'attache, entre les années 1695 et 1705 à reprendre l'étude du mouvement. Le travail de Varignon s'effectue en deux phases : d'abord, il introduit le concept de «vitesse dans chaque instant» ; puis il définit la «force accélératrice dans chaque instant». Observant les formules qu'il vient de construire à l'issue de cette double construction, Varignon en déduit ce que l'on nomme aujourd'hui l'«algorithme de la cinématique».

Dans deux mémoires, lus aux séances de l'Académie royale des sciences, respectivement le samedi 5 juillet et le samedi 6 septembre 1698, Varignon donne un nouveau départ à la science du mouvement,

en élaborant d'abord le concept de «vitesse dans chaque instant». Le premier mémoire donne une expression générale de la vitesse susceptible de traiter tous les mouvements dans le cas de trajectoires rectilignes, quel que soit le mode de variation de la vitesse ; il est intitulé *Règle générale pour toutes sortes de mouvements de vitesses quelconques variées à discrétion*.

Varignon considère comme uniforme la vitesse d'un corps pendant chaque instant de son mouvement. Il définit tout d'abord un certain nombre de variables à partir desquelles la mise en place conceptuelle peut être réalisée : «Soient $AB = x$ (voir l'encadré page ci-contre) les espaces parcourus en quelque sens qu'on voudra, $BE = z$ les temps employés à les parcourir, et $BC = y = DF$ les vitesses à chaque point

B de ces espaces.» Les variables, espace, temps et vitesse, étant maintenant représentées par les «axes», ou segments de droite, AB , BE et BC (ou DF), il associe ces variables deux à deux, afin d'engendrer ce qu'on nommerait, en termes modernes, un diagramme des espaces EE , et deux diagrammes des vitesses CC et FF : «De manière que la courbe EE (quelle qu'elle soit) formée par tous les points E , exprime les espaces par ses abscisses AB , et les temps employés à les parcourir, par ses ordonnées correspondantes BE ; la courbe CC (quelle qu'elle soit aussi) formée par tous les points C exprime de même les espaces par les abscisses AB , et les vitesses à chaque point B de ces espaces, par ses ordonnées correspondantes BC ; enfin la courbe FF (quelle qu'elle soit encore) exprime aussi par ses ordonnées DF ces mêmes vitesses comparées aux temps BE ou AD qui leur servent d'abscisses.»

«Cela posé, les instants seront notés dz ; l'espace parcouru dans chaque instant, dx ; et la vitesse avec laquelle dx aura été parcouru sera noté y .» Ainsi, dans un instant égal à dz , l'espace parcouru par le mobile sera égal à dx , tandis que la vitesse de ce mobile sera égale à y . Varignon affirme alors que cette vitesse, dans chaque instant, peut «être regardée comme uniforme : de sorte que $y \pm dy = y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = dx/dz$ pour la règle de tous les mouvements variés comme on voudra, c'est-à-dire quelque rapport d'espace, de temps ou de vitesse, qu'on suppose ; la vitesse de chaque instant étant toujours et partout égale au quotient de l'espace parcouru dans chaque instant divisé par cette même différentielle de temps» (aujourd'hui les notations ont changé : le temps s'exprime

par t et non plus par z , et la vitesse par v et non plus par y).



EDME MARIOTTE (1620-1684) a établi avec Robert Boyle la loi de compression des gaz, qu'il étudie ici expérimentalement. Il publia également un *Traité de la percussion ou choc des corps*, où il refusait l'idée qu'un mouvement accéléré le soit dès le premier instant. Il proposait que, dès le début d'un mouvement, le corps est animé d'une vitesse très petite, mais finie.

La règle générale de Varignon

Il est important de souligner, comme Varignon le fera explicitement dans un mémoire en date du 6 juillet 1707, intitulé *Des mouvements variés à volonté, comparés entre eux et avec les uniformes*, que «l'espace et le temps étant des grandeurs hétérogènes, ce n'est point proprement elles qu'on compare ensemble dans le rapport qu'on appelle vitesse, mais seulement les grandeurs homogènes qui les expriment, lesquelles sont ici, et seront toujours dans la suite ou deux lignes, ou deux nombres, ou deux autres grandeurs homogènes qu'on voudra». Ainsi, Varignon fait un pas décisif en montrant que l'on peut dépasser le débat sur les grandeurs homogènes en comparant non pas directement les grandeurs, mais les nombres qui les expriment en fonction des unités préalablement définies.

Le raisonnement qui conduit Varignon au concept de vitesse dans chaque instant repose directement sur les procédures du calcul des différences mises en œuvre en particulier dans l'*Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, publiée à Paris en 1696 par L'Hospital. «On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite ; ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle puisse être considérée comme demeurant la même.» Ce qui conduit Varignon à confondre $v \pm dv$ avec v . Cette vitesse v peut alors être «considérée comme demeurant la même» pendant l'intervalle de temps dt au cours duquel la longueur dx a été parcourue ; en conséquence, «la notation seule des vitesses uniformes» donne bien, immédiatement, l'expression de la vitesse v dans chaque instant : $v = dx / dt$.

Ayant caractérisé la vitesse dans chaque instant, Varignon donne, dans son mémoire du 5 juillet 1698, une «Règle générale». Celle-ci n'est qu'une reprise de sa caractérisation, sous trois aspects différents, privilégiant successivement, à la faveur de manipulations algébriques, les vitesses, les temps et les espaces :

«Règle générale Des vitesses, Des temps, Des espaces ($v = dx / dt$ ou $dt = dx / v$ ou $dx = vdt$).»

De ces trois formules, il suit bien évidemment que, «quels que soient présentement la vitesse d'un corps

(accélérée, retardée, en un mot variée comme on voudra), l'espace parcouru et le temps employé à le parcourir, deux de ces trois choses étant données à discrétion, il sera toujours facile de trouver la troisième par le moyen de cette règle, même dans les variations de vitesse les plus bizarres qui se puissent imaginer».

La construction du concept de vitesse dans chaque instant résulte donc finalement d'un double travail conceptuel : l'un autorisant, par le dépassement du débat classique sur les grandeurs homogènes, d'exprimer le concept de vitesse sous la forme d'un quotient ; l'autre permettant de faire intervenir aisément les concepts du calcul leibnizien, par l'introduction de l'idée selon laquelle la vitesse peut être considérée comme constante dans un instant de temps. L'énoncé de la Règle générale clôt la première partie du mémoire du 5 juillet 1698. La deuxième partie s'attache, à travers cinq exemples, à la mise en œuvre de cette règle générale.

Deux mois plus tard, le 6 septembre 1698, Varignon complète cette première étude par un deuxième mémoire consacré aux mouvements qui suivent des trajectoires incurvées : «Application de la Règle générale des vitesses variées, comme on voudra, aux mouvements par toutes sortes de courbes, tant mécaniques que géométriques. D'où l'on déduit encore une nouvelle manière de démontrer les chutes isochrones dans la cycloïde renversée.»

En possession du concept de vitesse dans chaque instant, Varignon utilise le calcul leibnizien, valable tant pour les mouvements rectilignes que pour les mouvements curvilignes. Puis, en 1700, s'appuyant sur la conceptualisation de la force accélératrice proposée par Isaac Newton dans le Lemme X de la section I du Livre I des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Varignon obtient l'expression de la «force accélératrice dans chaque instant», à savoir « $y = ddx / dt^2$ ou $y = dv / dt$ ». Il énonce alors ce qu'il nomme les Règles générales des mouvements en lignes droites (il généralisera au cas des trajectoires curvilignes peu après) : $v = dx / dt$ et $y = dv / dt = ddx / dt^2$.

Ces règles nous révèlent que les expressions des concepts de vitesse dans chaque instant et de force accélératrice dans chaque instant peuvent être déduites l'une de l'autre par un simple calcul qui met en œuvre les algorithmes

leibniziens. Pour reprendre Auguste Comte (1798-1857) : «Toutes les questions relatives à cette théorie préliminaire du mouvement varié se réduiront immédiatement à de simples recherches analytiques, qui consisteront ou dans des différentiations ou, le plus souvent, dans des intégrations.»

Les enjeux de la physique mathématique

Au début de cet article, nous nous demandions comment la conceptualisation différentielle de la science du mouvement avait favorisé la réorganisation et le développement de cette science et permis de surmonter les difficultés antérieures. Varignon apporte des réponses ou du moins des éléments de réponse.

Il apparaît clairement que la conceptualisation différentielle de la science du mouvement au début du XVIII^e siècle n'est pas le résultat d'une simple transposition, en termes différentiels, des concepts et des démarches de la science du mouvement tels qu'ils s'exprimaient auparavant ; c'est plutôt le résultat d'une reconstruction conceptuelle qui a conduit à une réorganisation du champ de la science du mouvement autour des concepts de vitesse dans chaque instant et de force accélératrice dans chaque instant.

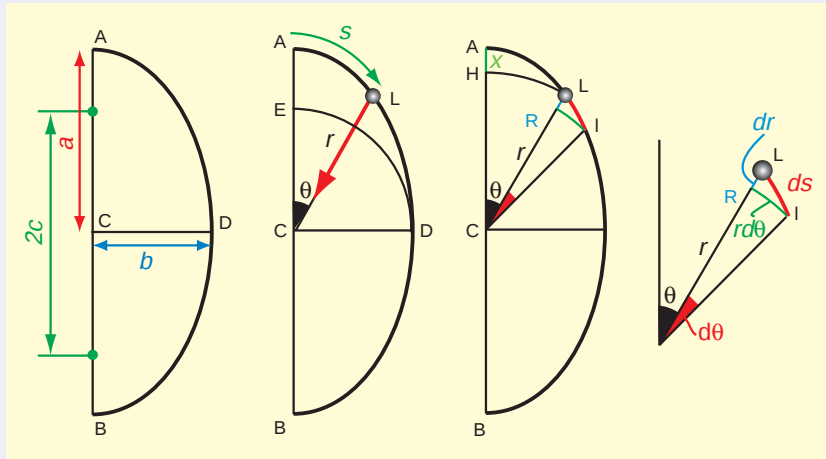
Cette reconstruction conceptuelle est riche d'enseignements : en utilisant le nouveau calcul leibnizien pour donner au concept de vitesse dans chaque instant ou, en modernisant légèrement, de «vitesse instantanée», une expression explicite et opérante, Varignon montre *a contrario* qu'on ne pouvait pas, avant, penser efficacement cette vitesse instantanée. En outre, et d'un point de vue plus général, le travail conceptuel de Varignon témoigne également que les mathématiques ont avec la physique un rapport de constitution, car c'est de leur couplage que se trouvent engendrés les nouveaux concepts, en l'occurrence ceux de vitesse dans chaque instant et de force accélératrice dans chaque instant.

Cette reconstruction permet alors de comprendre l'extraordinaire développement de la science du mouvement au XVIII^e siècle ; celui-ci résulte, d'une part, de la très grande généralité des deux nouveaux concepts mis en place par Varignon et, d'autre part, du fait que les expressions de ces concepts sont susceptibles de se

L'algorithme de la cinématique

Varignon calcule la force centrale y dans le cas où un corps décrit une ellipse, le centre de force étant confondu avec le centre de l'ellipse, cas qu'Isaac Newton examinait dans la proposition 10, problème 5, livre I de ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*.

Varignon détermine d'abord la longueur ds d'un petit arc. Nous transcrivons ici son raisonnement et sa figure en termes modernes. Il considère une ellipse ABD de centre C, de grand axe $AB=2a$. Il définit le petit axe $CD=b$ et la distance $2c$ qui sépare les foyers. Puis il nomme p le paramètre de l'ellipse et lui donne implicitement la valeur $2b^2/a$.



La première étape du calcul est la détermination de $ds=LI$. L'abscisse curviligne s est égale à AL . Soit H le point de l'axe AC , à la distance $r=CL$ de C .

L'équation de l'ellipse est : $r^2 = b^2/(1 - e^2 \cos^2 \theta)$, où e est l'excentricité de l'ellipse, égale à c/a et θ l'angle ACL . Cette équation s'écrit également : $b^2/r^2 = 1 - e^2 \cos^2 \theta$, qui donne, par différentiation, $-(b^2/r^3)dr = e^2 \cos \theta \sin \theta d\theta$. Or, d'après l'équation de l'ellipse $\cos^2 \theta = (r^2 - b^2)/e^2 r^2$. On en déduit, d'une part, $\cos \theta$ et, d'autre part, la valeur de $\sin^2 \theta = 1 - (r^2 - b^2)/e^2 r^2$.

Nous obtenons par substitution en prenant les valeurs positives de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$: $-(b^2/r)dr = \sqrt{(r^2 - b^2)(e^2 r^2 - r^2 + b^2)}d\theta$. Par ailleurs : $dz = rd\theta = RI$.

En conséquence : $dz = -b^2 dr / \sqrt{(r^2 - b^2)(e^2 r^2 - r^2 + b^2)}$.

Il ne reste plus qu'à exprimer ce résultat en fonction du paramètre $p (= 2b^2/a)$ et non plus de b et de e : $dz = -a^2 p dr / \sqrt{(2ar^2 - a^2 p)(a^2 p - pr^2)}$.

Nous pouvons maintenant obtenir une expression différentielle caractéristique d'un petit arc de trajectoire : $dz^2 = dr^2 + rd\theta^2$:

$$dz^2 = [(2a^3 pr^2 - 2apr^4 + a^2 p^2 r^2) / \{(2ar^2 - a^2 p)(a^2 p - pr^2)\}] dr^2.$$

Calcul de la force centrale y

Il s'agit maintenant, par l'intermédiaire de simples manipulations algébriques-différentielles, de faire apparaître l'expression générale de la force centrale y dans la mesure où le mouvement est assujéti à la loi des aires.

Nous avons : $ds^2/dz^2 = 2a^2 r^2 - 2r^4 + apr^2/a^3 p$.

Soit, également : $2a^2 - 2r^2 + ap/a^3 p = ds^2/r^2 dz^2$.

Or, d'après la loi des aires, «on aura partout ici suivant M. Newton (Phil. Nat. Princ. Math. lib. I, sect. 2, th. 1) les dt comme les rdz , ou $dt = rdz$ ».

En conséquence, l'expression précédente peut s'écrire :

$$ds^2/dt^2 = 2a^2 - 2r^2 + ap/a^3 p.$$

Varignon différencie alors les deux expressions en considérant dt comme une constante : $2dsd(ds)/dt^2 = -4rdr/a^3 p$, mais $dr = -dx$, d'où $4r/a^3 p = 2dsd(ds)/dx dt^2$. Il fait ainsi apparaître, à l'issue de son calcul, et seulement d'un calcul, l'expression générale, trouvée précédemment, de la force centrale y , d'où $y = 4r/a^3 p$. Celle-ci est donc bien comme la distance $CL(r)$ du centre C de l'ellipse «au corps L qui la décrit».

Varignon déduit alors de ce résultat ceux qui concernent la parabole et l'hyperbole.

déduire l'une de l'autre par le jeu de simples procédures bien réglées de différentiation et d'intégration. La science du mouvement devient algorithmique.

L'œuvre de Varignon est trop souvent oubliée ou, au mieux, limitée à ses contributions à la statique (le polygone de Varignon permet, notamment, de décrire les forces qui s'exercent dans des systèmes mécaniques à l'équilibre). Ce manque d'intérêt pour la plus grande partie de l'œuvre de Varignon s'explique simplement par le fait que la plupart des historiens de la mécanique classique ne voyaient, dans les mathématiques, qu'un instrument ou qu'un outil au service de la science, et privilégiaient l'analyse historique des concepts ou des principes de la mécanique ; ce faisant, ils négligèrent de penser la science du mouvement en tant que physique mathématique, c'est-à-dire qu'ils négligèrent le plus souvent de reconnaître son plein effet à l'action proprement mathématique de la physique mathématique dans la coordination, la cohérence et la genèse conceptuelle.

Or c'est précisément sur ce terrain que se situe l'effort de Varignon. À cet égard, n'est-il pas remarquable de constater que, si ses formules et règles générales résument et rassemblent bien divers résultats, elles sont aussi et surtout des points de départ pour de nouvelles investigations ? Avec Varignon, la physique mathématique, qui avait reçu son impulsion de Galilée, de Christiaan Huygens (1629-1695) et de Newton, prend plus nettement conscience de sa valeur inductive spécifique.

En ce sens, on peut dire que l'œuvre de Varignon, caractérisée par son nouveau style analytique orienté vers l'obtention d'ensembles de lois ou de règles régies par des procédures algorithmiques, style qui culminera, en 1788, avec la mécanique analytique de Joseph Louis Lagrange, aura finalement ouvert la voie à ce qui sera la physique mathématique des XVIII^e et XIX^e siècles.

Michel BLAY est directeur de recherche au CNRS et directeur adjoint chargé de la recherche à l'École normale supérieure Lettres et Sciences humaines.

M. BLAY, *La Naissance de la mécanique analytique*, Presses universitaires de France, 1992.

M. BLAY, *Les Principia de Newton*, Presses universitaires de France, 1995.